

DOI:10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.201912065

基于能量法的轴横向荷载作用下单桩受力变形分析

张 玲, 陈金海, 欧 强

(湖南大学岩土工程研究所, 湖南 长沙 410082)

摘要: 轴向和横向荷载作用下单桩的受力变形分析是桩基研究的重点内容之一。单桩在水平荷载作用下会产生一定的水平位移与弯矩, 而此时作用轴向荷载会使得桩体出现一定的压曲与附加弯矩, 以致轴横向荷载作用下的单桩受力变形与单独作用水平荷载或轴向荷载的单桩存在较大的区别。故本文基于能量法, 首先分别建立轴横向荷载作用下单桩的受力变形能量方程以及桩周土体能量方程, 然后考虑桩土变形协调与一定的桩土相互作用, 基于最小势能原理得到单桩变形控制微分方程, 并采用幂级数法进行求解, 最终得到轴横向荷载作用下单桩受力变形分析的幂级数解答。通过编程计算, 将本文方法计算结果与试验结果、数值分析结果、规范法计算结果进行对比分析, 验证了本文方法的合理性和可行性。在此基础上, 基于本文解答进行了影响参数分析, 结果表明: 桩体长径比、桩土弹性模量比、桩周土模量深度变化系数均对轴横向受荷单桩的桩身水平位移与最大弯矩值有一定的影响, 其中桩周土模量深度变化系数以不小于 0.6 为宜。

关键词: 横向受荷桩; 轴向荷载; 能量法; 幂级数解

中图分类号: TU473.1+1

文献标识码: A

文章编号: 1000-3665(2020)05-0081-11

Deformation analysis of pile under combined axial and lateral loads by using the energy method

ZHANG Ling, CHEN Jinhai, OU Qiang

(Geotechnical Engineering Institute, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China)

Abstract: An analysis of deformation and inner force of pile under combined axial and lateral loads is one of the most important aspects for pile foundation. Under the action of lateral load, the single pile will produce certain lateral displacement and bending moment, at this time, the axial load will make the pile appear certain buckling and additional bending moment. The deformation of a single pile under the action of combined axial and lateral loads is different from that under the action of the lateral load or axial load. By using the energy method, this study firstly deduces the energy equations for the pile under combined axial and lateral loads and the surrounding soils, respectively. Combining with deformation compatibility and certain interaction for the pile-soil, the governing differential equation of pile deformation is obtained based on the principle of the minimum potential energy. A power series method is employed to solve the equation, and the power series solutions for the deformation and inner force of pile under the axial and lateral loads is finally obtained. To validate the presented solutions in this study, the results from current solutions are compared with the test results, numerical results, and the calculation results from the code method, showing a good agreement with the existed methods. The influence parameters are discussed. The results indicate that the ratio of length to pile diameter, the ratio of elastic modulus of pile to soil and the coefficient of modulus of soil around pile all have certain influence on the lateral displacement and the maximum bending moment of pile under the axial and lateral loads. It is found that the coefficient of modulus of soil around pile should be no less than 0.6.

收稿日期: 2019-12-30; 修订日期: 2020-03-13

基金项目: 国家自然科学基金项目资助(51678231)

第一作者: 张玲(1982-), 女, 博士, 副教授, 主要从事桩基础及软土地基处理方面的研究工作。E-mail: zhanglhd@163.com

Keywords: lateral load pile; axial load; energy method; power series solution

在桥梁、海洋等桩基的施工与服役过程中,桩基除承受竖向荷载外,往往还可能同时受到风荷载、汽车制动力、波浪冲刷、地震作用等水平荷载的作用。因此轴向、横向荷载作用下单桩的受力变形分析非常重要。目前高层建筑、桥梁及海洋工程的桩基设计中,常规的做法是将轴向荷载与横向荷载分开考虑,分别计算轴向与横向荷载作用下单桩的内力与位移,而后基于小变形假定进行叠加,该种叠加的方法虽计算相对简单,但未考虑轴向荷载与横向荷载作用引起的耦合效应,不能充分反映轴横向荷载作用下单桩的受力变形实际。

已有的室内试验及数值分析结果均表明^[1-5]:轴向荷载对水平受荷桩的承载性状有较大影响,如“ $P-\Delta$ 效应”等,且轴横向荷载存在较为复杂的相互作用。日本学者横山幸满曾指出^[6]:应力叠加的原理并不适用桩体同时承受轴向与横向荷载的情况。

为此,轴横向荷载共同作用下单桩的受力变形应考虑轴横向应力的耦合作用,目前相关的理论研究成果主要有:赵明华等^[7-8]基于“ m 法”,求得了考虑轴横向荷载共同作用下的柔性桩解析解,并对基桩的特性进行了深入的研究。李微哲等^[9]通过假定地基系数满足 $(mz+C)$ 的线性增长,探讨分析了轴横向荷载偏心情况下的单桩内力与位移;梁发云等^[10]基于小变形假定对轴横向荷载共同作用下的单桩进行了研究,并针对其主要影响因素进行了分析。张磊等^[11-12]利用地基反力法求得了轴横向受荷桩的半解析解,研究了自由段桩长及地基反力系数的分布情况等对单桩内力与变形的影响;Liang等^[13]基于 Mindlin 方程提出了轴横向受荷桩的有限元解。张玲等^[14]基于 Winkler 弹性地基梁理论,利用相邻单元连续条件与矩阵传递法研究了地基成层性对轴横向受荷桩的影响。周立朵等^[15]基于 $p-y$ 曲线法研究了轴横向荷载作用下的单桩桩土相互作用,得到了荷载-位移曲线、弯矩分布等规律。Zhu等^[16]通过矩阵传递法研究了轴向力及其沿桩身的分布对水平受荷响应的影响。

但上述理论分析方法中, m 值的选取与 $p-y$ 曲线形式的确定不能直接从土工试验中获得,而能量法的优点在于所需的土体参数较易获得,且可在一定程度上考虑桩土复杂的相互作用。因此有学者尝试采用能量法研究荷载作用下单桩的受力变形^[17-18]。而对于水平荷载作用下的单桩,Sun等^[19]建立了土体在柱坐

标下的位移方程,并采用能量法去考虑水平受荷桩的受力与变形,Zhang等^[20]、徐洞斌等^[21]分别通过能量原理建立了水平荷载作用下桩土体的能量方程,并通过有限差分求得了单桩在水平荷载作用下的受力响应。但上述研究仅针对水平受荷桩而言,未考虑轴向荷载的影响。为此,本文拟在前人的基础上,基于最小势能原理,并结合幂级数法得到轴横向荷载作用下单桩桩身水平位移及内力的解答,以期工程实际中轴横向荷载下桩基的计算分析提供参考。

1 轴横向荷载作用下单桩的受力变形分析

1.1 计算模型的建立

单桩在轴横向荷载作用时,其桩身因水平荷载产生了较大的水平位移与弯矩,而轴向力作用使得桩身会产生附加弯矩,出现一定的压曲,这个附加弯矩的存在又会使得桩身的水平位移增大,而轴向力引起的桩身水平位移是非线性的,故建立如图1所示模型。

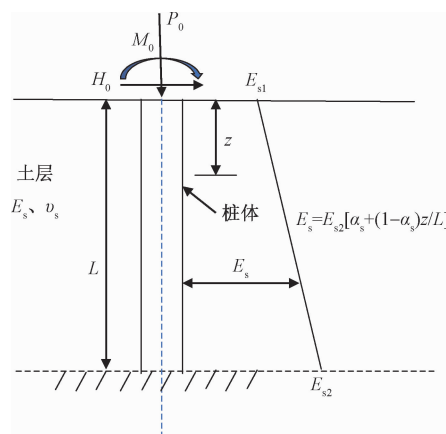


图1 单桩受力计算模型示意图

Fig.1 Schematic diagram of the calculation model for pile

如图1所示的桩-土体系中:桩长为 $L(\text{m})$;桩身半径为 $R(\text{m})$;桩身抗弯刚度为 $E_p I_p$;桩顶作用水平力 H_0 ,轴向荷载 P_0 ,弯矩 M_0 。桩周土体弹性模量为 E_s ,泊松比为 ν_s ;考虑桩周土体模量沿深度的变化,其变化形式参考文献[20],桩周土体在地面处的弹性模量为 E_{s1} ,在桩底处弹性模量为 E_{s2} ,桩身范围内距桩顶 z 深度处土体的弹性模量为:

$$E_s = E_{s2}[\alpha_s + (1 - \alpha_s)z/L] \quad (1)$$

式中: α_s ——桩周土弹性模量沿深度的变化系数,

$$\alpha_s = E_{s1} / E_{s2}。$$

1.2 桩土体系能量方程的建立

本文采用 Sun 等^[19]提出的土体在柱坐标下的位移模式:

$$\begin{cases} u(r, \theta, z) = u(z) \varphi(r) \cos \theta \\ v(r, \theta, z) = -u(z) \varphi(r) \sin \theta \\ w = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中: u, w, v ——沿径向、轴向、转角方向的位移, 如图 2 所示;

r, θ, z ——柱坐标径向、轴向与转角方向;

$u(z)$ ——桩身随深度 z 变化的位移函数;

$\varphi(r)$ —— r 方向土体的无量纲位移函数。

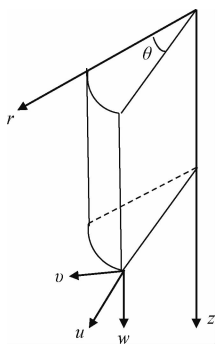


图 2 坐标系与位移分量图

Fig. 2 The coordinate system and displacement components

根据弹性力学几何关系与本构关系可得:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \left(\frac{d\varphi}{dr} \right) \cos \theta \\ 0 \\ 0 \\ -u \left(\frac{d\varphi}{dr} \right) \sin \theta \\ - \left(\frac{du}{dz} \right) \varphi \sin \theta \\ \left(\frac{du}{dz} \right) \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} u \frac{d\varphi}{dr} \cos \theta \\ -u \frac{d\varphi}{dr} \sin \theta \\ - \frac{du}{dz} \varphi \sin \theta \\ \frac{du}{dz} \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}$ —— r, θ, z 方向的正应变分量;

$\gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{zr}$ —— $r\theta, \theta z, zr$ 方向的剪应变分量;

$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$ —— r, θ, z 方向的正应力分量;

$\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}$ —— $r\theta, \theta z, zr$ 方向的剪应力分量。

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{E_s(1-\nu_s)}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_s\nu_s}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_s\nu_s}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} \end{bmatrix}$$

则桩土体系中各部分能量分别可表示为^[22]:

$$\Pi_{\text{pile}} = \frac{1}{2} E_p I_p \int_0^L \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz \quad (5)$$

$$\Pi_{\text{soil}} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} r dr d\theta dz \quad (6)$$

$$\Pi_f = \frac{c\tau}{2} \int_0^L z \cdot \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz \quad (7)$$

$$\Pi_p = \frac{P_0}{2} \int_0^L \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz \quad (8)$$

$$\Pi_H = -H_0 \cdot u|_{z=0} \quad (9)$$

$$\Pi_M = -M_0 \cdot \left(\frac{du}{dz} \right) \Big|_{z=0} \quad (10)$$

式中: c ——桩截面周长;

τ ——桩侧摩阻力, 根据文献[23]可采用静载试验获得或根据地区经验值得;

$\Pi_{\text{pile}}, \Pi_{\text{soil}}, \Pi_f, \Pi_p, \Pi_H, \Pi_M$ ——桩身应变能、土体应变能、桩侧土体摩阻力势能、桩顶竖向荷载势能、桩顶水平荷载势能及桩顶弯矩势能。

桩土体系总能量方程为:

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_{\text{pile}} + \Pi_{\text{soil}} + \Pi_f + \Pi_p + \Pi_H + \Pi_M = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} r dr d\theta dz + \frac{1}{2} E_p I_p \int_0^L \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz + \\ &+ \frac{c\tau}{2} \int_0^L z \cdot \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz + \frac{P_0}{2} \int_0^L \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz - \\ &- H_0 u|_{z=0} - M_0 \left(\frac{du}{dz} \right) \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (11)$$

将式(3)、式(4)代入式(11), 可得桩土体系总能量方程为:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} E_p I_p \int_0^L \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz + \\ &+ \frac{\pi}{2} \int_0^L \int_0^\infty \left[\frac{E_s(3-4\nu_s)}{2(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} u^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\frac{E_s}{1+\nu_s} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \varphi^2 \Big] r dr dz + \frac{P_0}{2} \int_0^L \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz - H_0 u \Big|_{z=0} - M_0 \left(\frac{du}{dz} \right) \Big|_{z=0} \quad (12)$$

$$\frac{\pi}{2} \int_R^\infty \int_L^\infty \left[\frac{E_s(3-4\nu_s)}{2(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} u^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 + \frac{E_s}{1+\nu_s} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \varphi^2 \right] r dr dz + \frac{c\tau}{2} \int_0^L z \cdot \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz +$$

1.3 桩、土位移控制方程

由最小势能原理可知, $\delta\Pi=0$, 由式(12)求变分可得式(13):

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ E_p I_p \frac{d^4 u}{dz^4} - \frac{\pi E_{s2}}{1+\nu_s} \frac{d}{dz} \left\{ \left[\alpha_s + (1-\alpha_s) \frac{z}{L} \right] \frac{du}{dz} \right\} \int_R^\infty \varphi^2 r dr \right. \\ & \quad \left. + \frac{\pi(3-4\nu_s) E_{s2} [\alpha_s + (1-\alpha_s) z/L]}{2(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} \int_R^\infty \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 r dr \cdot u \right. \\ & \quad \left. - c\tau \left(\frac{du}{dz} + z \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} \right) - P_0 \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} \delta u dz \\ & + \left\{ E_p I_p \frac{d^3 u}{dz^3} - P_0 \frac{du}{dz} - c\tau z \frac{du}{dz} - \frac{\pi E_{s2} \alpha_s}{1+\nu_s} \int_R^\infty \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 r dr \cdot \frac{du}{dz} - H_0 \right\} \delta u \Big|_{z=0} \\ & + \left\{ -E_p I_p \frac{d^3 u}{dz^3} + P_0 \frac{du}{dz} + c\tau z \frac{du}{dz} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\pi E_{s2} [\alpha_s + (1-\alpha_s) z/L]}{1+\nu_s} \int_R^\infty \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 r dr \cdot \frac{du}{dz} \right\} \delta u \Big|_{z=L} \\ & + \left(E_p I_p \frac{d^2 u}{dz^2} - M_0 \right) \delta \frac{du}{dz} \Big|_{z=0} + \left(-E_p I_p \frac{d^2 u}{dz^2} \right) \delta \frac{du}{dz} \Big|_{z=L} \end{aligned} \right\} = 0 \quad (13)$$

故由式(13)可推得桩身位移控制方程(14)及沿桩身任意深度处弯矩 M 及剪力 H 的表达式(17):

$$\begin{aligned} & E_p I_p \frac{d^4 u}{dz^4} - \frac{\pi E_{s2}}{1+\nu_s} \frac{d}{dz} \left\{ \left[\alpha_s + (1-\alpha_s) \frac{z}{L} \right] \frac{du}{dz} \right\} \\ & \int_R^\infty \varphi^2 r dr + \frac{\pi(3-4\nu_s) E_{s2} [\alpha_s + (1-\alpha_s) z/L]}{2(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} \\ & \int_R^\infty \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 r dr \cdot u - c\tau \left(\frac{du}{dz} + z \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} \right) - P_0 \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \\ & (0 \leq z \leq L) \end{aligned} \quad (14)$$

其中令:

$$n_1 = \frac{1}{R^2} \int_R^\infty \varphi^2 r dr, n_2 = \int_R^\infty \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 r dr \quad (15)$$

即桩身位移控制方程可化为:

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 u}{dz^4} - \frac{\pi n_1 R^2 E_{s2} [\alpha_s + (1-\alpha_s) z/L]}{(1+\nu_s) E_p I_p} \frac{d^2 u}{dz^2} - \\ & \frac{(1+\nu_s)(c\tau z + P_0)}{(1+\nu_s) E_p I_p} \frac{d^2 u}{dz^2} - \\ & \left[\frac{\pi n_1 R^2 E_{s2} (1-\alpha_s)}{(1+\nu_s) L \cdot E_p I_p} + \frac{c\tau}{E_p I_p} \right] \frac{du}{dz} + \\ & \frac{\pi(3-4\nu_s) n_2 E_{s2} [\alpha_s + (1-\alpha_s) z/L]}{2(1+\nu_s)(1-2\nu_s) E_p I_p} \cdot u = 0 \\ & (0 \leq z \leq L) \end{aligned} \quad (16)$$

桩身任意深度处弯矩 M 及剪力 H 为:

$$\begin{cases} M = -E_p I_p \frac{d^2 u}{dz^2} \\ H = E_p I_p \frac{d^3 u}{dz^3} - \frac{\pi n_1 E_{s2} \alpha_s R^2 + (1+\nu_s)(P_0 + c\tau z)}{(1+\nu_s)} \frac{du}{dz} \end{cases} \quad (17)$$

同理, 式(12)对 φ 取变分可得土体位移控制方程:

$$r \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi}{dr} - \left(\frac{\psi}{R} \right)^2 r \varphi = 0 \quad (18)$$

式中: ψ ——无量纲系数, 决定了水平位移随径向 r 方向减小的速度。

ψ 可以表示为:

$$\psi^2 = \frac{X_1 + X_2}{X_3 + X_4} \quad (19)$$

其中 X_1, X_2, X_3, X_4 分别为:

$$\begin{aligned} X_1 &= 2n_2 R^2 \int_0^L \left[\alpha_s + (1-\alpha_s) \frac{z}{L} \right] \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz \\ X_2 &= n_2 R \sqrt{\frac{(3-4\nu_s) n_2}{(1+2n_1)(1-2\nu_s)}} \cdot u^2(L) \\ X_3 &= \frac{(3-4\nu_s) n_2}{1-2\nu_s} \int_0^L \left[\alpha_s + (1-\alpha_s) \frac{z}{L} \right] (u)^2 dz \\ X_4 &= \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{(3-4\nu_s)(1+2n_1) n_2}{(1-2\nu_s)}} \cdot u^2(L) \end{aligned}$$

式(18)满足边界条件: 当 $r=R$ 时, $\varphi(r)=1$, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, $\varphi(r \rightarrow \infty)=0$, 则有:

$$n_1 = \frac{1}{2[K_0(\gamma)]^2} \{ [K_1(\gamma)]^2 - [K_0(\gamma)]^2 \} \quad (20)$$

$$n_2 = \frac{1}{2[K_0(\gamma)]^2} \{ [K_1(\gamma) + \gamma K_0(\gamma)]^2 - (\gamma^2 + 1)[K_1(\gamma)]^2 \} \quad (21)$$

式中: $K_0(\cdot)$, $K_1(\cdot)$ ——修正后的第二类贝塞尔函数。

1.4 桩身位移控制方程的解

式(14)可采用幂级数法求解,具体求解过程参考文献[7],故可得其解为:

$$u(z) = \sum_{j=0}^3 a_j \xi_j \quad (22)$$

其中: $\xi_j = \sum_{n=0}^{\infty} C_{j,n} \cdot z^n$

$$C_{j,n+4} = \frac{(A+Q)(n+1)(n+2)C_{j,n+2}}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{(B+T)(n+1)^2 C_{j,n+4} - FC_{j,n} - GC_{j,n-1}}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (n \geq 1)$$

$$C_{j,4} = \frac{2(A+Q)C_{j,2} + (B+C)C_{j,1} - FC_{j,0}}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$C_{j,k} = \begin{cases} 0 & j \neq k; \quad j, k = 0, 1, 2, 3 \\ 1 & j = k; \quad j, k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

式中: a_0, a_1, a_2, a_3 ——待定系数。

$$\text{且: } \begin{cases} A = \frac{\pi n_1 R^2 E_{s2} \alpha_s}{(1 + \nu_s) E_p I_p} \\ B = \frac{\pi n_1 R^2 E_{s2} (1 - \alpha_s)}{(1 + \nu_s) L E_p I_p} \\ T = \frac{c\tau}{E_p I_p} \\ Q = \frac{P_0}{E_p I_p} \\ F = \frac{\pi(3 - 4\nu_s) n_2 E_{s2} \alpha_s}{2(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s) E_p I_p} \\ G = \frac{\pi(3 - 4\nu_s) n_2 E_{s2} \alpha_s}{2(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s) L E_p I_p} \end{cases} \quad (23)$$

由式(22)可知桩身位移方程的幂级数函数均可由系数 a_0, a_1, a_2, a_3 表示,而 a_0, a_1, a_2, a_3 可通过联立桩顶与桩底的边界条件进行求解。

其中边界条件可由式(13)推得,表达式为:

$$\begin{cases} E_p I_p \frac{d^3 u}{dz^3} - \frac{\pi n_1 E_{s2} \alpha_s R^2 + (1 + \nu_s) P_0}{(1 + \nu_s)} \frac{du}{dz} - H_0 = 0 & (z = 0) \\ E_p I_p \frac{d^2 u}{dz^2} + M_0 = 0 & (z = 0) \text{ (桩顶自由)} \\ \frac{du}{dz} = 0 & (z = 0) \text{ (桩顶嵌固)} \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} E_p I_p \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 & (z = L) \text{ (桩底自由)} \\ \left[E_p I_p \frac{d^3 u}{dz^3} - \frac{\pi n_1 E_{s2} \alpha_s R^2 + (1 + \nu_s)(P_0 + c\tau z)}{(1 + \nu_s)} \frac{du}{dz} \right] - \frac{\pi E_{s2} R}{2(1 + \nu_s)} \sqrt{\frac{(3 - 4\nu_s)(1 + 2n_1)n_2}{(1 - 2\nu_s)}} = 0 & (z = L) \text{ (桩底自由)} \\ \frac{du}{dz} = 0 & (z = L) \text{ (桩底嵌固)} \\ u = 0 & (z = L) \text{ (桩底嵌固)} \end{cases} \quad (25)$$

假定桩顶位移 u_0 、转角 φ_0 、弯矩 M_0 以及剪力 H_0 已知,结合式(22)、(24)、(25)可得:

$$\begin{cases} u|_{z=0} = a_0 = u_0 \\ \frac{du}{dz}|_{z=0} = a_1 = \varphi_0 \\ \frac{d^2 u}{dz^2}|_{z=0} = 2a_2 = -\frac{M_0}{E_p I_p} \\ \frac{d^3 u}{dz^3}|_{z=0} = 6a_3 = \frac{H_0}{E_p I_p} + (A + Q)\varphi_0 \end{cases} \quad (26)$$

由上述边界条件可求得 a_0, a_1, a_2, a_3 的值。再选定合适的项数,即可求得水平位移的函数表达式,其具体流程如图3所示。当桩底嵌入岩层或者桩底土层较坚硬的时候,认为桩端为固定边界。为方便求解,下文将采用桩顶自由、桩底固定的边界条件进行求解验证。

2 算例分析

2.1 算例1

Kerisel 等^[24]对水平受荷单桩进行了室内模型试验。模型桩桩长 $L = 4.65$ m, 桩径 $D = 0.36$ m, 桩顶自由, 桩底嵌固。受到的水平荷载 $H_0 = 60$ kN, 弯矩 $M_0 = 69$ kN·m, 桩身的弹性模量 $E_p = 20$ GPa, 土体的弹性模量 $E_s = 9.233$ MPa。土体的泊松比 $\nu_s = 0.3$, 桩周土模量沿深度的变化系数 $\alpha_s = 1$ 。Filho 等^[25]通过有限元与边界元软件验证了其试验结果,图4给出了本文方法计算结果与 Kerisel 等模型试验结果、Filho 等有限元结果、《公路桥涵地基与基础设计规范》(以下简称规范法)推荐的简化方法计算结果的对比分析。

由图4可知,本文方法计算所得桩身水平位移结果与上述几种方法所得结果都比较接近,而且相比较于 Filho 等有限元方法,本文计算方法所得的桩身水位位移更接近于 Kerisel 模型试验结果。就桩顶 ($z = 0$ m) 水平位移而言, Kerisel 模型试验结果为 9.7 mm;

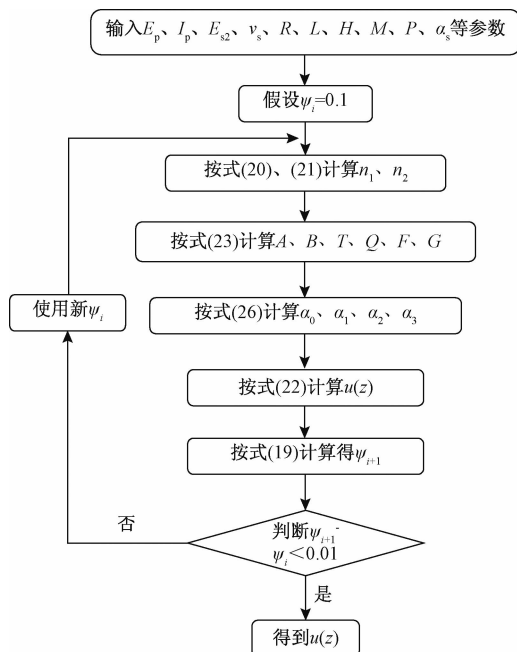


图3 桩身水平位移求解程序图

Fig.3 Program diagram for solving horizontal displacement of pile

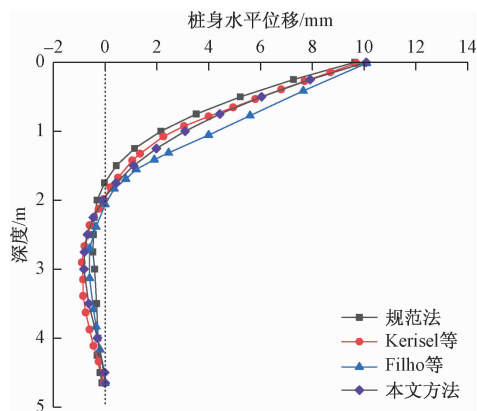


图4 水平荷载作用下的桩身水平位移

Fig.4 Lateral displacement of pile due to the horizontal load

Filho 等有限元方法结果为 10.1 mm, 相对比试验结果误差为 4.12%; 本文方法计算所得桩顶位移为 10.08 mm, 相对比试验结果误差为 3.9%。由此可见本文方法可用于分析水平受荷桩的受力变形分析。

2.2 算例2

肖世伟等^[26]利用有限元方法对马桥河桥钻孔桩基足尺试验所得结果进行了模拟分析,并将实测数据进行反算,给出了地基系数 $m = 1.398 \times 10^4 \text{ kN/m}^4$ 与桩身弹性模量 $E_b = 3.188 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, 试验的桩体参数分别为: 桩长 $L = 17.0 \text{ m}$, 桩径 $D = 0.85 \text{ m}$, 土层泊松比 $\nu_s = 0.3$, 桩周土模量沿深度的变化系数 $\alpha_s = 1$,

则公式(1)即简化为 $E_s = E_{s2}$, 土体弹性模量 $E_{s2} = 6 \text{ MPa}$, 本文方法计算所得桩顶位移与文献[26]结果如表1所示。此外,为比较本文计算桩身位移沿桩身的分布情况,以文中参数建立弹性有限元模型,取桩顶轴向荷载为 313.60 kN 的情况,本文方法计算的桩身位移与有限元模拟的桩身位移对比结果如图5所示。

表1 本文方法与文献[26]结果对比

Table 1 Comparison of the result of the method in this paper with that of the reference[26]

水平荷载 $H_0 = 38.1426 \text{ kN}$; 弯矩 $M_0 = 43.5970 \text{ kN} \cdot \text{m}$					
轴向荷载 P_0/kN	文献[26]桩顶 位移/mm	本文桩顶 位移/mm	相对 误差/%	轴力影响/%	
				文献[26]	本文
0	2.462 4	2.427 6	1.43	0	0
313.6	2.470 4	2.441 3	1.19	0.32	0.56
627.2	2.478 4	2.455 4	0.94	0.65	0.58
1 254.4	2.494 7	2.484 3	0.42	1.31	1.18
2 508.8	2.527 9	2.545 7	0.70	2.66	2.47
5 017.6	2.597 2	2.686 0	3.42	5.47	5.51

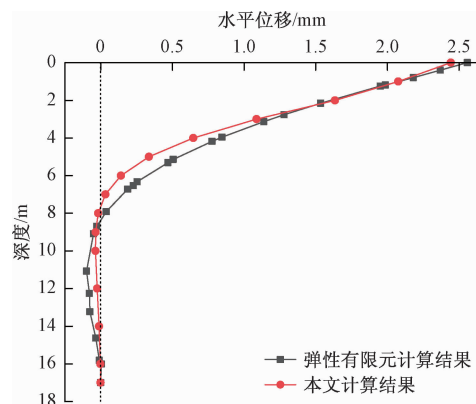


图5 桩身水平位移图

Fig.5 Lateral displacement of pile

由表1可知,本文方法计算所得结果与文献[26]所得结果基本吻合,且随着轴向荷载的增大,对桩顶水平位移的影响也随之增大,且由图5可知,本文方法计算所得的桩身位移与弹性有限元分析所得结果拟合较好,可应用于工程实际。

2.3 算例3

Cho 等^[27]对水平受荷的嵌岩桩基进行了多组现场横向荷载试验,该工程位于美国北卡罗来纳州的一个桥梁替换项目,其中一组其桩侧有2层地基土,第一层为深度 $L_0 = 1 \text{ m}$ 的砂土层,第二层为深度 $L_1 = 3.3 \text{ m}$ 的泥板岩;桩长为 $L = 4.3 \text{ m}$, 桩体半径 $R = 0.38 \text{ m}$, 桩体弹性模量 $E_p = 24.8 \text{ GPa}$ 。

Yang 等^[28]采用地基反力法与变分原理对该工程

进行了验证分析,并根据 Cho 等试验所得结果的 p - y 曲线进行反算,假设桩侧路基反力模量 K_{h0} 在地面处为 0,沿深度线性增加,求得首层土其增加系数为 $n_{hs,0} = 19.5 \text{ MN/m}^3$ 。泥板岩内的路基反力模量 $K_{h1} = 180.6 \text{ MPa}$, $n_{hs,1} = 393.3 \text{ MN/m}^3$,路基反力模量的经验公式如式(27)所示,其计算模型如图 6 所示。

$$\begin{cases} \text{岩体: } K = E_M (D/D_r) e^{-2\nu_s} \left(\frac{E_p I_p}{E_M D^4} \right)^{0.284} \\ \text{土体: } K = \frac{E_s D}{(1 - \nu_s^2) D_{\text{ref}}} \left[\frac{E_s D^4}{E_p I_p} \right]^{1/12} \end{cases} \quad (27)$$

$$D_r = 0.305 \text{ m}, D_{\text{ref}} = 1.0 \text{ m}$$

式中: K ——路基反力模量;

E_M ——岩体模量。

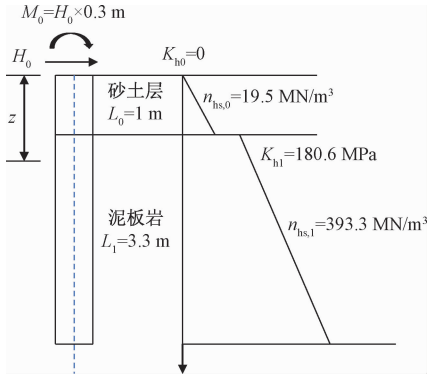


图 6 Yang 等计算模型图

Fig.6 Schematic diagram of the Yang calculation model

利用本文能量法对该算例进行验证分析,桩体与土体参数如上所述,本文所用的土体弹性模量与路基反力模量的换算公式为^[29]:

$$K_h = \frac{1.3 E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\frac{16 E_s * R^4}{E_p I_p} \right)^{\frac{1}{12}} \quad (28)$$

式中: K_h ——路基反力模量。

桩体在泥板岩内基本不发生水平位移,因此为简便计算,本文利用砂土层的参数进行验证,由式(28)可得砂土层底土体弹性模量 $E_{s2} = 17.73 \text{ MPa}$,取桩周土模量沿深度的变化系数 $\alpha_s = 0.1$,土体泊松比取为 $\nu_s = 0.3$,计算结果如图 7 所示,其中 Yang 所用 p - y 曲线法为利用 Cho 试验结果反算求得。

由图 7 可知,本文方法所得的桩顶位移较文献[28]更接近实测值。

3 参数分析

3.1 桩土弹性模量比的影响分析

取桩顶自由,桩底嵌固,桩的长径比为 $L/D = 15$,

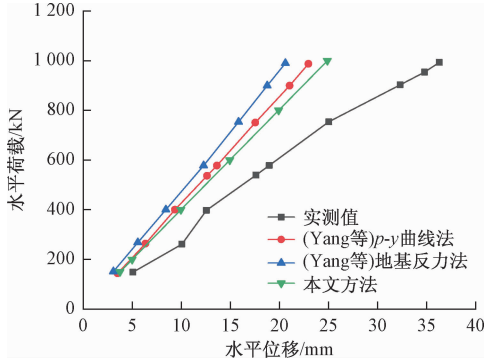


图 7 水平荷载作用下的桩身水平位移

Fig.7 Lateral displacement of pile due to the horizontal load

取桩周土模量沿深度的变化系数 $\alpha_s = 1$,土的泊松比取为 $\nu_s = 0.3$,桩土的弹性模量比值 E_p/E_{s2} 分别为 100,500,1 000,2 000 与 5 000。桩顶水平荷载与轴向荷载分为取为 $H_0 = 120 \text{ kN}$, $P_0 = 60 \text{ kN}$ 。其计算结果如图 8 所示。

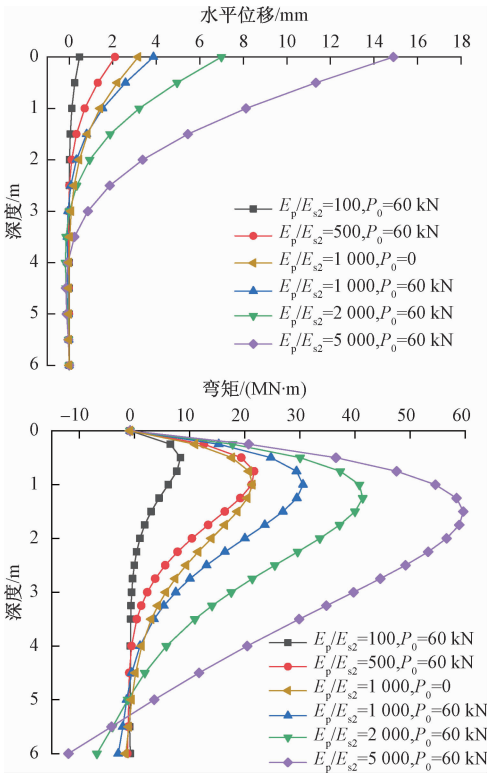


图 8 桩土弹性模量比变化下的桩身水平位移和桩身弯矩

Fig.8 Horizontal displacement and bending moment of pile under the variation of elastic modulus ratio of pile to soil

由图 8 可知,桩身水平位移随着桩土模量比的增大而逐渐增大,桩顶处水平位移在桩土模量比 $E_p/E_{s2} = 5 000$ 处急剧增大,在轴向压力的作用下,桩身最大弯矩点不断向下移动。而当轴向荷载由 0 变为

60 kN 时,其桩顶水平位移减小,桩身最大弯矩点下移,轴向荷载的存在使得桩身出现一定的压曲现象,桩身的水平位移与弯矩均出现了增大的情况。

3.2 桩体长径比的影响分析

取桩顶自由,桩底嵌固,桩土弹性模量比 $E_p/E_{s2} = 1\ 000$,取桩周土模量沿深度的变化系数 $\alpha_s = 1$,土体的泊松比为 $\nu_s = 0.3$,桩体长径比 L/D 分别为 5,10,15,20,25。桩顶水平荷载与轴向荷载分为取为 $H_0 = 120\text{ kN}$, $P_0 = 60\text{ kN}$ 。为比较方便,将桩长进行归一化可得图 9。

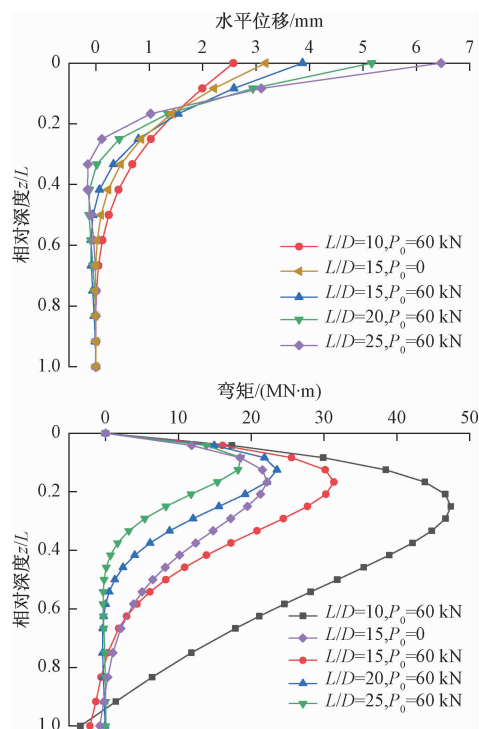


图 9 长径比变化下的桩身水平位移和桩身弯矩

Fig. 9 Horizontal displacement and bending moment of pile under the variation of length-diameter ratio

由图 9 可见,当桩顶轴向荷载为 60 kN 时,桩的工作状态会随桩长径比的变化而发生改变。当桩的长径比 L/D 大于 10 时,桩身出现反弯。其原因是随桩的长径比增大,桩体表现出柔性桩性质,近地面处的土体发生屈服,导致桩顶水平位移增大;而当长径比 L/D 小于 10 时,桩体受力近似于刚性桩,桩身位移曲线近似为直线,且桩身不出现反弯点。此外,桩的长径比对桩身弯矩也有较大影响。随着桩的长径比 L/D 的增大,桩身中上部的弯矩变化明显,桩身最大弯矩减小,且最大弯矩点逐渐上移。当长径比变化时,轴向荷载对桩身位移与弯矩的影响与桩土模量比变化时的影响类似。

3.3 轴向荷载的影响分析

取桩顶自由,桩底嵌固,桩的长径比 $L/D = 15$,取桩周土模量沿深度的变化系数 $\alpha_s = 1$,土的泊松比取为 $\nu_s = 0.3$,桩土弹性模量比值 $E_p/E_{s2} = 1\ 000$ 。桩顶水平荷载取 $H_0 = 120\text{ kN}$,轴向荷载 P_0 分别为 0,600,1 200,2 400,4 800 kN。计算结果如图 10 所示。

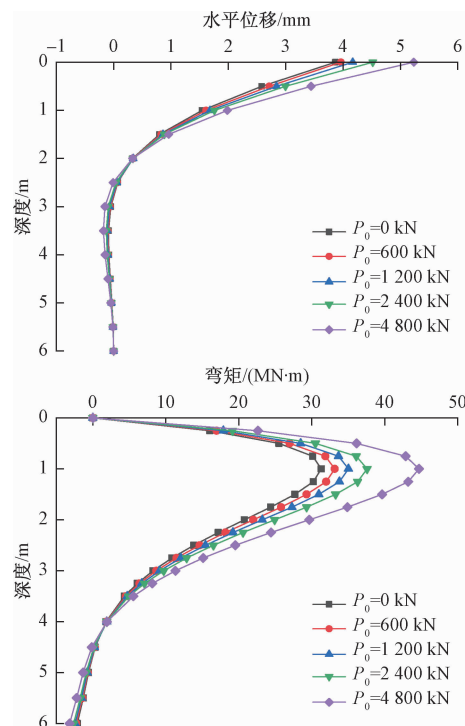


图 10 轴向荷载变化下的桩身水平位移和桩身弯矩

Fig. 10 Horizontal displacement and bending moment of pile under the variation of axial load

由图 10 可知,轴向荷载对桩身水平位移的影响主要位于桩身上部 2 m,约为 10 倍桩径范围内。随着轴向荷载的增加,桩身最大弯矩点不断下移,其影响范围约位于地面以下 4 m,约为 20 倍桩径范围内。与文献 [10] 所得结论基本一致。而且,随着 P_0/H_0 比值的增大,轴向荷载对桩身水平位移及弯矩的影响明显增大,其主要原因在于由轴向荷载引起的桩身挠曲变形是非线性的。

3.4 α_s 的影响分析

桩周土体的弹性模量对桩身内力及变形有较大影响,由式(1)可知,系数 α_s 决定了桩周土体弹性模量沿深度的变化趋势,故对该系数做参数分析。

取桩顶自由,桩底嵌固,桩的长径比为 $L/D = 15$,土的泊松比取为 $\nu_s = 0.3$,桩土的弹性模量比值 $E_p/E_{s2} = 1\ 000$, α_s 分别取为 1,0.8,0.6,0.4,0.2。桩顶水平荷载与轴向荷载分为取为 $H_0 = 120\text{ kN}$, $P_0 = 60\text{ kN}$,

计算结果如图 11 所示。

由图 11 可知,当桩顶轴向荷载由 0 增加到 60 kN 时,桩顶水平位移从 3.17 mm 增大为 3.86 mm,增大比例为 21.7%,桩身最大弯矩由 22.2 kN·m 增大到 31.36 kN·m,增大比例为 41.3%。而当桩顶轴向荷载不变时,随桩周土模量沿深度的变化系数 α_s 从 1 减小到 0.2 时,桩顶水平位移的增大比例分别为 19.17%、47.67%、94.3%、190.2%,桩顶弯矩的增大比例分别为 10.9%、25.7%、50.7%、95.7%。可知当桩周土模量沿深度的变化系数过小时,即上部土层弹性模量过小,会导致桩顶位移急剧增大,桩身弯矩急剧增大,最大弯矩点逐渐下移,故在实际工程中可采取对浅部土层进行换填等方法去改善土质,从而控制桩顶的水平位移与桩身弯矩。

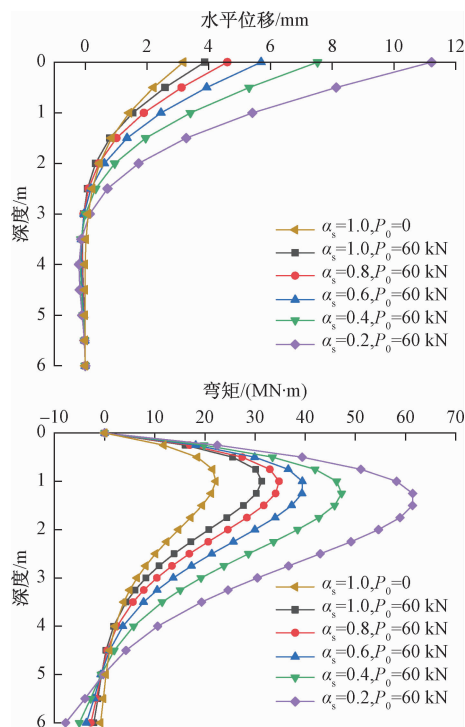


图 11 α_s 变化下的桩身水平位移和桩身弯矩

Fig. 11 Horizontal displacement and bending moment of pile under the variation of α_s

4 结论

(1) 本文基于最小势能原理建立了轴横向荷载作用下单桩的能量方程,一定程度上考虑了轴横向荷载的耦合作用,将桩顶的轴横向荷载、桩侧摩阻力及桩土相互作用视为一个整体进行分析,并给出了幂级数解答。

(2) 参数分析结果表明:①桩土弹性模量比对单

桩内力与变形有较大影响。②桩身長径比小于 10 时,桩体受力近似刚性桩容易引起桩身失稳。③轴向荷载对桩身水平位移与弯矩的影响主要集中与桩身上部 20 倍桩径范围内,而对深处影响较小。④桩周土模量沿深度的变化系数 α_s 小于 0.6 时,单桩桩身水平位移与弯矩受其影响很大。

(3) 本文方法可进一步推广到多层地基以及桩身变截面等情况。此外,为求解方便,本文仅以土体弹性模量沿深度线性变化的角度考虑土体的非线性,未考虑土体的弹塑性变形,这将在后续的工作中进一步深入研究。

参考文献 (References):

- [1] Meyerhof G G. Rupture surfaces in sand under oblique loads of the Soil Mechanics and Foundations Division[J]. ASCE, 1956 (discussion). Journal, 82 (SM3): 152 - 158.
- [2] MEYERHOF G G, HANNA A M. Ultimate bearing capacity of foundations on layered soils under inclined load[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1978, 15 (4): 565 - 572.
- [3] 赵春风, 王卫中, 赵程, 等. 砂土中竖向和弯矩荷载下单桩水平承载特性试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(1): 184 - 190. [ZHAO C F, WANG W Z, ZHAO C, et al. Lateral bearing capacity of single piles under vertical and moment load in sand[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, 32(1): 184 - 190. (in Chinese)]
- [4] 赵春风, 刘丰铭, 邱志雄, 等. 砂土中竖向和水平荷载共同作用下的单桩承载特性研究[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(1): 183 - 190. [ZHAO C F, LIU F M, QIU Z X, et al. Study on bearing behavior of a single pile under combined vertical and lateral loads in sand [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(1): 183 - 190. (in Chinese)]
- [5] 郑刚, 王丽. 成层土中倾斜荷载作用下桩承载力有限元分析[J]. 岩土力学, 2009, 30(3): 680 - 687. [ZHENG G, WANG L. Finite element analysis of bearing capacity of pile under inclined load in layered soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30 (3): 680 - 687. (in Chinese)]
- [6] 横山幸满. 桩结构物的计算方法和计算实例[M]. 唐业清, 吴庆荪, 译. 北京: 中国铁道出版社, 1984: 35 - 44. [横山幸满. Calculation method and example

- of pile structure [M]. TANG Y Q, WU Q S, trans. Beijing: China Railway Publishing House, 1984: 35 - 44. (in Chinese)]
- [7] 赵明华. 轴向和横向荷载同时作用下的桩基计算[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 1987, 14(2): 68 - 81. [ZHAO M H. The calculation of piles under simultaneous axial and lateral loading[J]. Journal of Hunan University (Natural Science), 1987, 14(2): 68 - 81. (in Chinese)]
- [8] 赵明华. 倾斜荷载下基桩的受力研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2001. [ZHAO M H. Study on the behavior of piles under inclined loads[D]. Changsha: Hunan University, 2001. (in Chinese)]
- [9] 李微哲, 赵明华, 单远铭, 等. 倾斜偏心荷载下基桩内力位移分析[J]. 中南公路工程, 2005, 30(3): 53 - 57. [LI W Z, ZHAO M H, SHAN Y M, et al. Analysis of single pile under eccentric and inclined loading [J]. Journal of Central South Highway Engineering, 2005, 30(3): 53 - 57. (in Chinese)]
- [10] 梁发云, 陈海兵, 宋著. 轴向荷载对横向受荷桩承载性状影响的参数分析[J]. 土木建筑与环境工程, 2011, 33(6): 25 - 30. [CHEN H B, LIANG F Y, SONG Z. Parameter analysis of effects of axial load on the lateral response of piles[J]. Journal of Civil, Architectural & Environment Engineering, 2011, 33(6): 25 - 30. (in Chinese)]
- [11] 张磊, 龚晓南, 俞建霖. 考虑土体屈服的纵横荷载单桩变形内力分析[J]. 岩土力学, 2011, 32(8): 2441 - 2445. [ZHANG L, GONG X N, YU J L. Analysis of deformation and internal force for single pile under combined vertical and lateral loads considering yielding of soil [J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(8): 2441 - 2445. (in Chinese)]
- [12] 张磊, 龚晓南, 俞建霖. 纵横荷载下单桩地基反力法的半解析解[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2011, 43(6): 96 - 100. [ZHANG L, GONG X N, YU J L. Semi-analytical solutions for single piles subjected to combined vertical and lateral loads by subgrade reaction method [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2011, 43(6): 96 - 100. (in Chinese)]
- [13] LIANG F Y, CHEN H B, CHEN S L. Influences of axial load on the lateral response of single pile with integral equation method[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2012, 36(16): 1831 - 1845.
- [14] 张玲, 赵明华, 赵衡. 倾斜荷载下桩柱式桥墩受力变形分析传递矩阵法[J]. 中国公路学报, 2015, 28(2): 69 - 76. [ZHANG L, ZHAO M H, ZHAO H. Transfer matrix method for deformation of pile type bridge pier under axial transverse load [J]. China Journal of Highway and Transport, 2015, 28(2): 69 - 76. (in Chinese)]
- [15] 周立朵, 孔纲强, 彭怀风, 等. 倾斜荷载下群桩承载特性理论分析[J]. 岩土力学, 2017, 38(9): 2647 - 2654. [ZHOU L D, KONG G Q, PENG H F, et al. Theoretical analysis of bearing capacities of pile group under oblique load [J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, 38(9): 2647 - 2654. (in Chinese)]
- [16] ZHU M X, ZHANG Y B, GONG W M, et al. Generalized solutions for axially and laterally loaded piles in multilayered soil deposits with transfer matrix method[J]. International Journal of Geomechanics, 2017, 17(4): 04016104.
- [17] 张小敏, 祝启坤. 能量法在搅拌桩复合地基稳定性分析中的应用[J]. 水文地质工程地质, 2003, 30(4): 79 - 82. [ZHANG X M, ZHU Q K. Application of energy analysis method in the stability study of deep mixing composite foundation [J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2003, 30(4): 79 - 82. (in Chinese)]
- [18] 邹新军, 王英宇, 赵明华, 等. 基于能量法的非均质地基中单桩受扭弹塑性分析[J]. 水文地质工程地质, 2016, 43(2): 54 - 61. [ZOU X J, WANG Y Y, ZHAO M H, et al. Elastic-plastic analysis of a torsional single pile in non-homogeneous subsoil based on energy principle [J]. Hydrogeology and Engineering Geology, 2016, 43(2): 54 - 61. (in Chinese)]
- [19] SUN K M. Laterally loaded piles in elastic media[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1994, 120(8): 1324 - 1344.
- [20] ZHANG L Y, ERNST H, EINSTEIN H H. Nonlinear analysis of laterally Loaded Rock-socketed shafts[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2000, 126(11): 955 - 968.
- [21] 徐洞斌. H-T 联合作用下基桩内力位移理论分析及试验研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2015. [XU D B. Theoretical analysis and experimental study of internal forces and deformation of single pile under H-T combined loading [D]. Changsha: Hunan University, 2015. (in Chinese)]
- [22] 赵明华, 刘伟浩, 尹平保, 等. 基于能量法的陡坡

- 段桥梁基桩屈曲稳定性分析[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2016, 47(2): 586 - 592. [ZHAO M H, LIU W H, YIN P B, et al. Buckling analysis of bridge piles in steep slopes based on energy method [J]. Journal of Central South University(Science and Technology), 2016, 47 (2): 586 - 592. (in Chinese)]
- [23] 建筑桩基技术规范:GJ94—2008[S]. 北京:中国建筑工业出版社,2008. [Technical Code for Building Pile Foundations; GJ94—2008 [S]. Beijing: China Architecture & Building Press,2008. (in Chinese)]
- [24] KE'RISEL J, ADAM M. Calcul des forces horizontales applicables aux fondations profondes dans les argiles et limons [J]. Annales d'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, Paris 1967,239: 1653 - 1694.
- [25] MATOS FILHO R, MENDONCA A V, DEPAIVA J B. Static boundary element analysis of piles submitted to horizontal and vertical loads [J]. Engineering Analysis With Boundary Elements, 2005, 29 (3): 195 - 203.
- [26] 肖世伟. 轴向力对横向受力桩的影响[J]. 西南交通大学学报, 1990, 25(4): 58 - 62. [XIAO S W. Effect of axial force on laterally-loaded piles [J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 1990, 25 (4): 58 - 62. (in Chinese)]
- [27] HWAN CHO K, CLARK S C, KEANEY B D, et al. Laterally loaded drilled shafts embedded in soft rock [J]. Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board, 2001, 1772(1): 3 - 11.
- [28] YANG K, LIANG R. Numerical solution for laterally loaded piles in a two-layer soil profile[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2006, 132(11): 1436 - 1443.
- [29] Bowles J E. Foundation analysis and design[M]. 5th Ed. New York: McGraw Hill, 1996.

编辑:张明霞