

基于 SMP 准则的上海软土本构模型

孙超群¹, 周科²

(1. 中铁二十四局集团有限公司, 上海 200071; 2. 上海大学土木工程系, 上海 200072)

摘要: 根据上海典型软土的真三轴排水试验, 文章提出了基于 SMP (Spatially Mobilized Plane, 空间滑动面) 准则的平面上的形状函数, 通过试验结果对形状函数进行了验证; 提出基于 SMP 准则的上海软土的新的屈服函数, 并与剑桥模型、关口-太田模型进行了理论比较, 结果表明新的屈服函数能更好地反映屈服面的空间形态。

关键词: 上海软土; SMP 准则; 屈服函数; 本构模型

中图分类号: P642.13⁺3; TU447

文献标识码: A

文章编号: 1000-3665(2009)02-0081-04

表 1 试样的物理力学指标

Table 1 Physical and mechanical indexes of samples

类型	淤泥质粉质粘土	淤泥质粘土
含水量 w (%)	42.8	49.4
重度 (kN/m^3)	17.9	17.3
空隙比 e	1.178	1.375
饱和度 S_r (%)	99.2	98.9
比重 G	2.73	2.75
塑性指标 I_P	15.0	21.9
液性指标 I_L	1.44	1.27

早在 20 世纪 30 年代, 上海软土就已闻名于世。几十年来, 有不少岩土工程专家提出了自己的上海软土模型。20 世纪 80 年代到 90 年代, 同济大学研制成功我国第一台真三轴仪, 使得根据真三轴试验结果, 建立比较合理的上海软土本构模型成为可能。赵锡宏等于 2002 年提出了上海软土的各向异性弹塑性模型^[1]。但是, 将 Matsuoka 等提出的 SMP (空间滑动面) 破坏准则应用于上海软土本构模型还没有人提过。本文正是引用 SMP 准则中平面上的形函数作为上海软土平面上的形函数, 进而提出上海软土的屈服函数。

1 试验结果及 SMP 准则概述

1.1 上海典型软土真三轴排水剪切试验

试验土样为上海有代表性的淤泥质粉质粘土和淤泥质粘土, 土样层顶埋深分别为 2.6 ~ 3.2 m, 10.3 ~ 11.5 m, 基本物理力学指标见表 1^[2]。

试样为 70 mm × 70 mm × 70 mm 的立方体。试样装入真三轴压力室后, 在 K_0 条件下固结 24 h。固结完成后, 进行真三轴排水剪切试验, 剪切采用等应变速率控制。试验中保持 σ_3 不变, 当 σ_1 增大时, 用计算机调节 σ_2 使 $b = (\sigma_2 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)$ 保持不变。对以上两种土进行中主应力比 b 分别为 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, σ_3 为 50 kPa 的 10 种试验, 得到两种土的应力 - 应变关系 (图 1 ~ 2)^[1]。

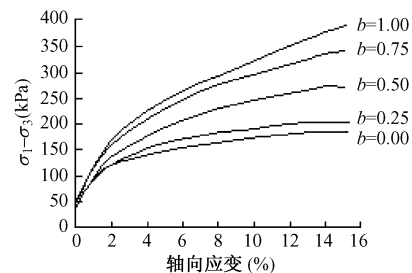


图 1 淤泥质粉质粘土 K_0 固结排水试验

Fig. 1 K_0 -consolidated drained tests for very soft silty clay

由图可以看出, 破坏时主应力差随中主应力比 b 的增加而增加。取轴向应变 $\epsilon_1 = 15\%$ 的强度投影到 $p = 150 \text{ kPa}$ 的平面上, 描点作出的曲线如图 3。由图 3 可以看出, 上海软土在平面上的破坏轨迹不再是 Mises 准则所描述的圆, 而是近似于 Mohr-Coulomb 准则的光滑曲线。故可用新的形函数描述上海软土在平面上的形状。

1.2 SMP 准则

SMP 准则是由 Matsuoka 和 Nakai 于 1974 年提出的, 它是一种土的三维破坏准则。SMP 破坏准则考虑了第三应力不变量对土体破坏的影响, 试验结果表明

收稿日期: 2007-08-23; 修订日期: 2007-11-05

作者简介: 上海市博士点基金项目

作者简介: 孙超群 (1983-), 男, 学士, 主要从事软土研究、软基处理等工作。

E-mail: sunchaoqun@gmail.com

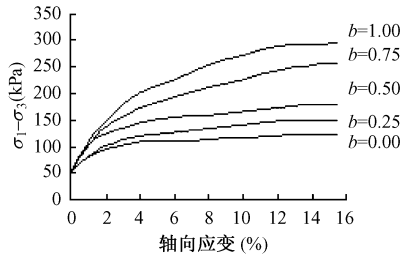


图2 淤泥质粘土 K₀ 固结排水试验

Fig. 2 K₀-consolidated drained tests for very soft clay

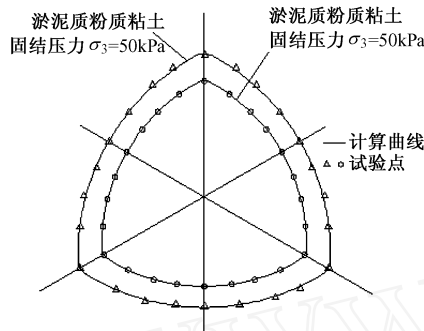


图3 上海软土在 平面上的屈服轨迹

Fig. 3 Yield locus on-plane for Shanghai soft clay

它能较好地解释土体的破坏。SMP 准则可表示为^[31]：

$$\frac{SMP}{SMP} = \frac{\sqrt{I_1 I_2 - 9 I_3}}{\sqrt{9 I_3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \tan \varphi_{mob} \quad (1)$$

式中：SMP_剪，SMP_垂——SMP 上的剪应力和垂直应力；

I₁，I₂ 和 I₃——应力张量的第一、第二和第三不变量；

φ_{mob}——三轴压缩条件下的发挥角，φ_{mob} = arcsin

(σ₁ - σ₃)/(σ₁ + σ₃)，并随着剪切从 0 到 (内摩擦角) 之间变化。

图 4 表示了 SMP 准则在 平面上的形状。由图可知，平面上的 SMP 准则在应力较小(φ_{mob}小)时接近圆，φ_{mob} = 时 为 SMP 破坏线。由于 SMP 准则主要用做破坏准则(φ_{mob} =)，据以上试验测得的在 平面上的屈服线与 SMP 准则在 平面的形状相似这一事实，故本文采用 SMP 准则在平面的形状作为屈服面在 平面上的轨迹^[31]。

2 平面上形状函数的选取

屈服面在 平面上的投影曲线已研究得较为充分。在这方面的改进工作多以 Mohr-Coulomb 准则的六边形为基础，以外凸的光滑曲线来逼近。对于上海软

土，姜洪伟等在 1995 年给出了一种形状函数^[2]。由第二部分的分析，这里选用图 5 所示的 SMP 准则在平面上的轨迹作为形状函数^[4]。

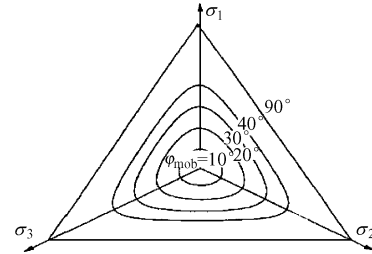


图4 平面上 SMP 准则的形状

Fig. 4 Shapes of SMP criterion in -plane

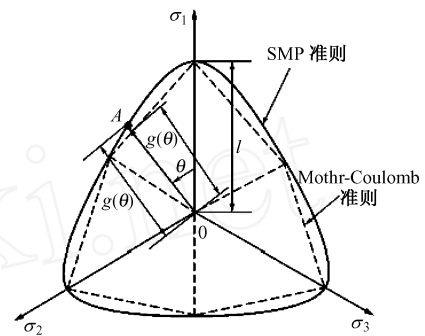


图5 平面上的摩尔-库仑准则(虚线)和 SMP 准则(实线)

Fig. 5 Mohr-Coulomb criterion (dotted line) and SMP criterion (solid line) in -plane

其形状函数为^[4]：

$$g(\theta) = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{8 + \sin^2 \theta_0} - \sin \theta_0)}{4\sqrt{2 + \sin^2 \theta_0} \cos \theta} \quad (2)$$

其中：

$$\theta_0 = \arccos \left(\frac{\sqrt{9 I_3}}{\sqrt{I_1 I_2}} \right) \quad (3)$$

$$= \frac{1}{3} \arccos \left[- \left(\frac{3}{2 + \sin^2 \theta_0} \right)^{\frac{3}{2}} \sin \theta_0 \cos 3 \theta \right] \quad (4)$$

式中：θ——应力 Lode 角。

2.1 形状函数的检验

为了使 平面上的屈服曲线光滑，且在 θ = ±π/6 时与 Mohr-Coulomb 准则拟和，要求形状函数满足以下条件^[5]：

$$\begin{cases} \frac{dg(\theta)}{d\theta} = 0 & \text{当 } \theta = \pm \frac{\pi}{6} \text{ 时} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1 & \text{当 } \theta = -\frac{\pi}{6} \text{ 时} \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} g\left(\frac{\pi}{6}\right) = K = \frac{3 - \sin \theta_0}{3 + \sin \theta_0} & \text{当 } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ 时} \end{cases} \quad (7)$$

式中： K ——代表三轴拉压强度之比；
 α ——土体的内摩擦角。

式(5)是要保证曲线和 Mohr-Coulomb 准则的平面上的图形相内接,并且在相接处光滑无尖角。由图 5 可看出这点是符合条件的,并且根据对式(2)进行求导,得到结果也是符合的。把 $\alpha = 1/6$ 和 $\alpha = 1/6$ 代入式(6)

和式(7)中,可以验证也符合条件。

2.2 形状函数的试验验证

根据真三轴试验结果,计算 $q = g(\alpha) q_c$,其中 q_c 为常规三轴压缩广义剪应力^[2]。将结果列于表 2~3 中,并与试验结果比较,由未栏知 q 与 q_c 的相对误差最大为 20%。可见计算值与试验结果比较吻合。

表 2 淤泥质粉质粘土计算值与试验值比较

Table 2 Comparison of calculated values and measured values of very soft silty clay

b	$\alpha = 1/3$	$\alpha = 1/6$	$\alpha = 1/3$	$\alpha = 1/6$	$g(\alpha)$	q	q_c	$(q - q_c) / q_c$
0.00	133.33	-0.52	0.58	0.52	108.87	0.77	102.50	-6.36
0.25	150.00	-0.28	0.54	0.63	110.40	0.84	125.48	15.09
0.50	188.89	0.00	0.61	0.69	133.56	0.85	160.76	27.19
0.75	257.78	0.28	0.74	0.64	189.72	0.77	198.94	9.22
1.00	300.00	1.57	0.82	0.52	244.95	0.69	206.47	-38.47

表 3 淤泥质粘土计算值与试验值比较

Table 3 Comparison of calculated values and measured values of very soft clay

b	$\alpha = 1/3$	$\alpha = 1/6$	$\alpha = 1/3$	$\alpha = 1/6$	$g(\alpha)$	q	q_c	$(q - q_c) / q_c$
0.00	177.78	-0.52	0.67	0.52	145.15	0.74	131.18	-13.97
0.25	201.11	-0.28	0.62	0.63	148.01	0.81	162.88	14.86
0.50	278.89	0.00	0.73	0.71	197.20	0.82	227.83	30.62
0.75	331.11	0.28	0.81	0.65	243.69	0.75	248.14	4.45
1.00	360.00	0.52	0.87	0.52	293.94	0.67	242.48	-51.46

3 上海软土的屈服函数

3.1 关口 - 太田本构模型的屈服函数

关口 - 太田于 1979 年在塑性理论基础上,采用塑性体应变为硬化函数的硬化规则和相适应的流动法则,提出考虑初始不等压固结 (K_0 固结) 状态所诱发的应力各向异性本构模型,其屈服函数为:

$$f = \frac{1}{1 + e_0} \ln \frac{p}{p_0} + D \left(\frac{p}{p_0} \right)^* = \left(\frac{p}{p_0} \right)^* \quad (8)$$

式中： λ , κ ——分别为压缩、回缩指数；

e_0, p_0 ——分别为 K_0 固结完成时的空隙比和有效平均主应力；

D ——剪胀系数, $D = \frac{\lambda - \kappa}{(1 + e_0) M}$ ；

M ——极限状态应力比；

$*$ ——广义应力比，

$$* = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{s_{ij}}{D} - \frac{s_{ij0}}{p_0} \right) \left(\frac{s_{ij}}{p} - \frac{s_{ij0}}{p_0} \right) ;$$

p, s_{ij} ——分别为有效平均主应力及偏应力分量；

s_{ij0} —— K_0 固结完成时的 s_{ij} 值；

$\frac{p}{p_0}$ ——塑性体应变。

上述屈服函数因在三维应力空间中旋转对称,因

此在 π 平面上的轨迹为圆,即采用扩展的 von Mises 破坏准则。

3.2 上海软土的屈服函数

结合上海软土真三轴试验结果及 SMP 屈服破坏准则,将屈服面在 π 平面上的形函数考虑进去,对关口 - 太田的屈服函数进行改进,提出新的屈服函数:

$$f = \frac{1}{1 + e_0} \ln \frac{p}{p_0} + Dg(\alpha) \left(\frac{p}{p_0} \right)^* = \left(\frac{p}{p_0} \right)^* \quad (9)$$

式中： $g(\alpha)$ ——考虑屈服面在 π 平面上的形状函数。

由于应力 Lode 角 α 是应力张量第二、三不变量的函数,即式(9)为三维应力空间的屈服函数,所以完全可以考虑中主应力的影响,克服了关口 - 太田本构模型的缺点,这也是本模型的最大特点。

4 三个屈服函数模型比较

本文模型与剑桥模型(屈服函数为 $f = \frac{1}{1 + e_0} \ln \frac{p}{p_0} + D \left(\frac{p}{p_0} \right)^*$)及关口 - 太田模型的区别,在于以下几点,这些也表明了本模型的优点。

(1) 对各向等压固结应力状态, $s_{ij0} = 0$, 则 $*$ = $\frac{p}{p_0}$, 关口 - 太田模型和剑桥模型的塑性体应变分别如下:

关口 - 太田模型:

$$\frac{p}{v} = \frac{1}{1 + e_0} \ln \frac{p}{p_0} + D \quad (10)$$

剑桥模型:

$$\frac{p}{v} = \frac{1}{1 + e_0} \ln \frac{p}{p_0} + D \quad (11)$$

本文模型:

$$\frac{p}{v} = \frac{1}{1 + e_0} \ln \frac{p}{p_0} + Dg(\cdot) \quad (12)$$

由比较可知,关口 - 太田的屈服函数可简化为剑桥屈服函数,本文的屈服函数只有在 $g(\cdot) = 1$ 时,才可简化为剑桥屈服函数。

(2)由屈服函数的表达式可知,三种屈服函数的塑性体应变的第一项(固结产生的体应变)是相同的。

(3)对体应变(或体积屈服)来说:

剑桥模型的体应变由 p, v 引起;

关口 - 太田模型的体应变由 p, v 引起;

本文的模型的体应变则由 p, v, σ_3 共同引起,真正体现三维应力空间的表达。

5 结论

(1)基于上海典型软土的真三轴试验,本文选取 SMP 准则中的 $\sigma_3 - p$ 平面上的形函数作为其形函数,满足条件,且在 $\sigma_3 - p$ 平面上无尖角,给土工数值分析带来方便。

(2)形函数 $g(\cdot)$ 的参数仅需常规三轴试验仪即可确定。

(3)新的屈服函数能够反映屈服面的空间形态,较剑桥模型、关口 - 太田模型具有更大的普遍性。

参考文献:

- [1] 赵锡宏,姜洪伟,袁聚云,等.上海软土各向异性弹塑性模型[J].岩土力学,2003,24(3):322-330.
- [2] 姜洪伟,张保良,袁聚云,等.上海软土的屈服函数[J].同济大学学报,1996,24(4):422-426.
- [3] 孙德安,姚仰平.基于 SMP 准则的双屈服面弹塑性模型的三维化[J].岩土工程学报,1999,21(5):631-634.
- [4] 孙德安,姚仰平.粒状材料的一个实用弹塑性模型[J].岩石力学与工程学报,2002,21(8):1147-1152.
- [5] 张学言.岩土塑性力学基础[M].天津:天津大学出版社,2004:73-74.
- [6] YAO Yang-ping, LUO Ting, SUN De-an, et al. A simple 3-D constitutive model for both clay and sand [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(2): 240-246.
- [7] 罗汀,姚仰平,松冈元.基于 SMP 准则的土的平面应变强度公式[J].岩土力学,2000,21(4):390-393.
- [8] 刘斯宏,姚仰平,孙德安,等.剪胀 K-G 模型及其有限元数值分析[J].土木工程学报,2004,37(9):69-74.
- [9] 连镇营,韩国城,姚仰平.基于 SMP 准则的改进剑桥模型及其在基坑工程中的应用[J].大连理工大学学报,2002,42(1):93-97.

A constitutive model of Shanghai soft clay based on SMP criterion

SUN Chao-qun¹, ZHOU Ke²

(1. China Railway 24th Bureau Group Co. Ltd, Shanghai 200071, China;

2. Department of Civil Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

Abstract: Based on the tests' results of true tri-axial apparatus, the shape function of yield locus on $\sigma_3 - p$ plane is presented, which is based on the SMP criterion. The shape function is verified through experiments. A yield function based on SMP criterion is also presented. A theoretical compare is made among the new yield function, the Cambridge model and the Ohta - Sekiguchi model. The new yield function is proved to be better to reflect the space shape of the yield plane.

Key words: Shanghai soft clay; SMP criterion; yield function; constitutive model

责任编辑:汪美华