

基于极限分析法的边坡临界高度及稳定性研究

姜玉平, 陈征宙, 毕 港, 蒋 鑫

(南京大学地球科学与工程学院, 南京 210093)

摘要: 基于塑性极限分析理论, 优化了受到地震力作用的均质土坡在破坏面为对数螺旋面形式时的临界坡高计算模型, 并在此基础上, 引进强度折减假定, 推导了地震作用下边坡的对数螺旋破坏形式的安全系数计算公式。该计算模型不仅能考虑地震力的作用, 而且能考虑不同安全系数要求对临界高度的影响。通过两个算例将文中提出的模型与传统极限平衡法对比, 文中方法计算安全系数较瑞典条分法大, 与简化 Bishop 法计算所得结果非常接近。

关键词: 极限分析; 对数螺旋面; 临界高度; 安全系数

中图分类号: P642.2; TU457

文献标识码: A

文章编号: 1000-3665(2012)02-0043-04

20 世纪 50 年代初是极限分析理论的创立阶段。1975 年, W. F. Chen^[1] 发表专著《极限分析与土体塑性》, 阐明了极限分析理论在土工问题中的运用, 他在边坡上限极限分析中根据相关联的流动法则构造了一个转动运动场, 根据外力做功与内能耗散相等的能量法来求解边坡的上限临界高度。目前极限分析理论已经在地基承载力计算、边坡稳定性分析等领域得到了广泛的应用^[2-6]。

Chen 求解的上限临界高度是仅考虑重力场作用下, 在 $F_s = 1$ 时推导出来的。然而, 实际工程中, 边坡需要一定的安全储备, 通常安全系数会取到 1.25、1.35 甚至更高; 其次, 地震预防越来越受到重视, 在边坡设计中, 必须要考虑到不同地区的地震设防烈度。基于以上因素考虑, 该公式就不再适用了, 需要对其进行一定的优化。基于此, 本文采用极限分析上限理论及对数螺旋线型滑裂面对边坡临界高度进行分析研究, 并基于此对边坡稳定性安全系数进行研究。

1 考虑地震的临界高度优化公式

根据极限分析上限法原理, 处于极限状态的边坡, 当滑动体产生滑动时, 外力(如重力、地震力等)所做的功率等于内力(滑面上的阻力)所产生的内能耗散, 即:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV \geq \int_S T_i v_i^* dS + \int_V F_i v_i^* dV \quad (1)$$

式中: σ_{ij} ——静力许可应力;

ε_{ij}^* ——与 σ_{ij} 对应的应变;

T_i, F_i ——面力、体力;

v_i^* ——运动许可速度场。

取土坡的破坏面为对数螺旋面, 基于相关联流动法则的塑性极限分析理论, 转动破坏时对数螺旋面上的位移速度矢量与对数螺旋面的切线间夹角为常量内摩擦角 φ 。则对数螺旋破坏面及滑动体的速度方程分别为:

$$r(\theta) = r_0 e^{(\theta-\theta_0) \tan \varphi} \quad (2)$$

$$v = v_0 e^{(\theta-\theta_0) \tan \varphi} \quad (3)$$

式中: $r(\theta)$ 、 v ——角度 θ 处的极径和速度。

1.1 模型建立

考虑地震的影响, 如图 1 所示。对于这种情况本文采用坐标转换方法^[7]对其求解。

坐标转换法就是当边坡受地震力和重力联合作用时, 将地震力和重力合成, 转换为仅一个竖向力作用下的边坡, 将问题简化, 方便通过原有公式求解。

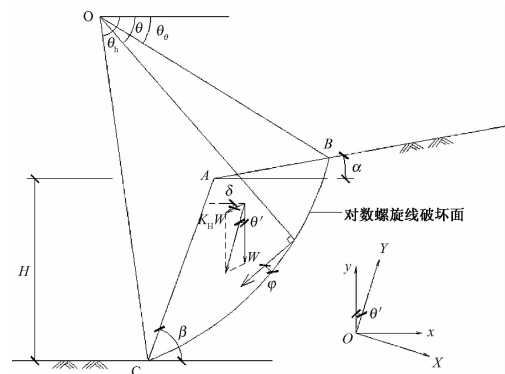


图 1 有地震作用的边坡旋转破坏简图

Fig. 1 Sketch of a slope with earthquake

将坐标系 (x, y) 顺时针旋转 θ 角(相当于将整个边

收稿日期: 2011-07-28; 修订日期: 2011-09-06

作者简介: 姜玉平(1986-), 男, 硕士研究生, 从事地质工程与岩土工程研究。

E-mail: j. yuping@gmail. com

坡逆时针旋转 θ 角)得坐标系 (X, Y) , 将新坐标系中 X 轴转为水平方向, 此时边坡如图 2 所示。旋转后的边坡参数可由几何关系得到:

$$\alpha' = \alpha + \theta' \quad (4)$$

$$\beta' = \beta + \theta' \quad (5)$$

$$W' = W \cdot \sqrt{1 + K_H^2 + 2K_H \sin \delta} \quad (6)$$

$$\gamma' = \gamma \cdot \sqrt{1 + K_H^2 + 2K_H \sin \delta} \quad (7)$$

$$H' = H \cdot \frac{\sin \beta'}{\sin \beta} \quad (8)$$

$$\frac{H'}{r_0} = \frac{\sin \beta'}{\sin(\beta' - \alpha')} [\sin(\theta_h + \alpha') e^{(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} - \sin(\theta_0 + \alpha')] \quad (9)$$

$$\frac{l}{r_0} = \frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha')} - \frac{\sin(\theta_h + \beta')}{\sin(\theta_h + \alpha') \sin(\beta' - \alpha')} [e^{(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} \sin(\theta_h + \alpha') - \sin(\theta_0 + \alpha')] \quad (10)$$

$$\tan \theta' = \frac{K_H \cos \delta}{1 + K_H \sin \delta}$$

式中: K_H ——地震影响系数;

θ' ——地震力与重力的合力与重力间的夹角;

δ ——地震力与水平面的夹角, 逆时针为正;

γ' ——将地震力与重力合成以后的合重度。

1.2 外功率

经过坐标转换以后边坡处于坐标系 (X, Y) 下, 满足原公式适用情况。如图 2 所示, 直接从 ABC 区几部分求出合重力做的外功率非常麻烦, 可分别求出 OAB、OBC 及 OAC 区域的合重力所作的功率, 采用叠加法进行计算。则滑动体地震力与重力共同所作的功率为:

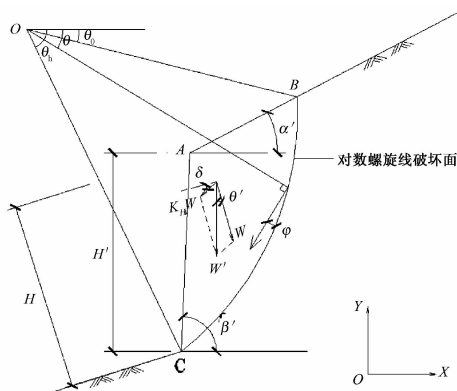


图 2 旋转后的边坡旋转破坏简图

Fig. 2 Sketch of a slope with earthquake after coordinate transformation

$$W'_y = \gamma' r_0^3 (f_1 - f_2 - f_3) \omega \quad (11)$$

式中: ω ——刚体转动角速度。

$$f_1(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{3(1 + 9 \tan^2 \varphi)} [(3 \tan \varphi \cos \theta_h + \sin \theta_h) e^{3(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} - (3 \tan \varphi \cos \theta_0 + \sin \theta_0)] \quad (12)$$

$$f_2(\theta_h, \theta_0) = \frac{1}{6} \frac{l}{r_0} (2 \cos \theta_0 - \frac{l}{r_0} \cos \alpha') \sin(\theta_0 + \alpha') \quad (13)$$

$$f_3(\theta_h, \theta_0) = \frac{e^{(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi}}{6} [\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{l}{r_0} \sin(\theta_h + \alpha')] [\cos \theta_0 - \frac{l}{r_0} \cos \alpha' + \cos \theta_h e^{(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi}] \quad (14)$$

1.3 内部耗损率

内部能量耗损发生在间断面 BC 上。沿该面能量耗损率的微分, 可以由该面的微分面积 $rd\theta/\cos\varphi$ 与粘聚力 c 以及与跨该面的切向间断速度 $V \cos\varphi$ 的连乘积得到, 沿整个间断面积分, 即:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_h} c(V \cos \varphi) \frac{rd\theta}{\cos \varphi} = \frac{c r_0^2 \omega}{2 \tan \varphi} [e^{2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} - 1] \quad (15)$$

1.4 临界高度

使外功率与内部能量耗损率相等, 得:

$$H' = \frac{c}{\gamma'} f(\theta_h, \theta_0) \quad (16)$$

$$f(\theta_h, \theta_0) = \frac{\sin \beta' [e^{2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} - 1]}{2 \sin(\beta' - \alpha') \tan \varphi (f_1 - f_2 - f_3)} [\sin(\theta_h + \alpha') e^{\sin(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} - \sin(\theta_0 + \alpha')] \quad (17)$$

将式(7)(8)代入式(16), 得:

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + K_H^2 + 2K_H \sin \delta}} \frac{\sin \beta}{\sin \beta'} \frac{c}{\gamma'} f(\theta_h, \theta_0) \quad (18)$$

式(18)给出了临界高度的一个上限。当 θ_h 和 θ_0 满足式(19)时, 函数 $f(\theta_h, \theta_0)$ 有一个最小值:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_h} = 0, \frac{\partial f}{\partial \theta_0} = 0 \quad (19)$$

解出这些方程, 将所得的 θ_h 和 θ_0 代入式(18)后, 即得到边坡临界高度 H_c 的一个最小上限。记 $N_s = \min f(\theta_h, \theta_0)$, 得:

$$H_c = \frac{1}{\sqrt{1 + K_H^2 + 2K_H \sin \delta}} \frac{\sin \beta}{\sin \beta'} \frac{c}{\gamma'} N_s \quad (20)$$

N_s 值是一个纯数, 不仅与坡角 α, β 有关, 而且也与内摩擦角 φ 、地震加速度 K_H 、地震方向 δ 有关。 H_c 是斜坡高度的临界值。由式(20)可以看出, 地震力的作用对边坡临界高度有非常明显的影响。

2 考虑安全系数的临界高度优化公式

对于考虑安全系数的情况, 采用强度折减法进行优化。即:

$$c' = \frac{c}{F_s}, \varphi' = \arctan \frac{\tan \varphi}{F_s} \quad (21)$$

式中: F_s ——折减系数。

由此,对式(20)进行变化得:

$$H_c = \frac{1}{F_s} \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 + K_H^2 + 2K_H \sin \delta}} \frac{c}{\sin \beta'} \frac{c}{\gamma} N_s \quad (22)$$

由 $N_s = \min f(\theta_h, \theta_0)$ 即可求出 N_s , 其中:

$$\tan \varphi' = \frac{\tan \varphi}{F_s} \quad (23)$$

式(22)可用于边坡设计过程中,对于任意安全系数要求以及地震烈度影响下的边坡临界高度估算。

3 安全系数的求解公式

在实际工程中,边坡安全系数是评价边坡是否稳定的重要依据。将式(22)进行变化,对于实际坡高为 H 的边坡,由式(24)可以计算出安全系数 F_s :

$$F_s = \frac{1}{H} \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 + K_H^2 + 2K_H \sin \delta}} \frac{c}{\sin \beta'} \frac{c}{\gamma} N_s \quad (24)$$

式(24)是个隐式方程,需要经过迭代求解。

4 算例分析

4.1 算例 1

已知某边坡,参数见表 1,现要求其该边坡稳定性系数满足 1.1,求边坡的临界高度。

通过式(22)计算所得边坡临界高度为 7.5029m。用 Slide 软件进行计算,取坡高为 7.5029m,计算得瑞典条分法、简化 Bishop 法安全系数分别为 1.0627、

1.0990。

表 1 边坡计算参数

Table 1 Calculated parameters

c (kPa)	φ (°)	γ (kN/m ³)	α (°)	β (°)	δ (°)	K_H
15	20	20	0	45	0	0.1

4.2 算例 2

已知淮北某电厂工程,某段挖方边坡拟开挖坡率为 1:0.75,岩性为闪长玢岩岩脉,性质相对较差。具体边坡参数见表 2,需对该边坡进行稳定性分析。

表 2 边坡计算参数

Table 2 Calculated parameters

c (kPa)	φ (°)	γ (kN/m ³)	α (°)	β (°)	δ (°)	K_H	H (m)
27	30	25	0	53.13	0	0.067	10

通过式(24)计算所得边坡安全系数为 1.3318。用 Slide 软件进行计算,坡高为 10m 时,计算得瑞典条分法、简化 Bishop 法安全系数分别为 1.2986、1.3391。

通过对比可以发现,本文方法的计算结果与简化 Bishop 法的计算结果较为接近。

为研究各参数对边坡稳定性的影响,分别改变表 2 中其中一个参数,可得出各个参数与 F_s 的关系,如图 3 所示。由图 3 可以清楚地看出安全系数 F_s 随着 $c, \varphi, \gamma, \alpha, \beta, \delta, K_H, H$ 等的变化情况:随着 c, φ 值增加, F_s 不断变大,随着 $\gamma, \alpha, \beta, K_H, H$ 的增加, F_s 不断减小。当地震力的方向角 δ 在 10~30° 范围时, F_s 取得最小值。

再次证明, c, φ 值的增加对边坡的稳定性有利的,而 $\gamma, \alpha, \beta, K_H, H$ 的增加对边坡稳定性是不利的。

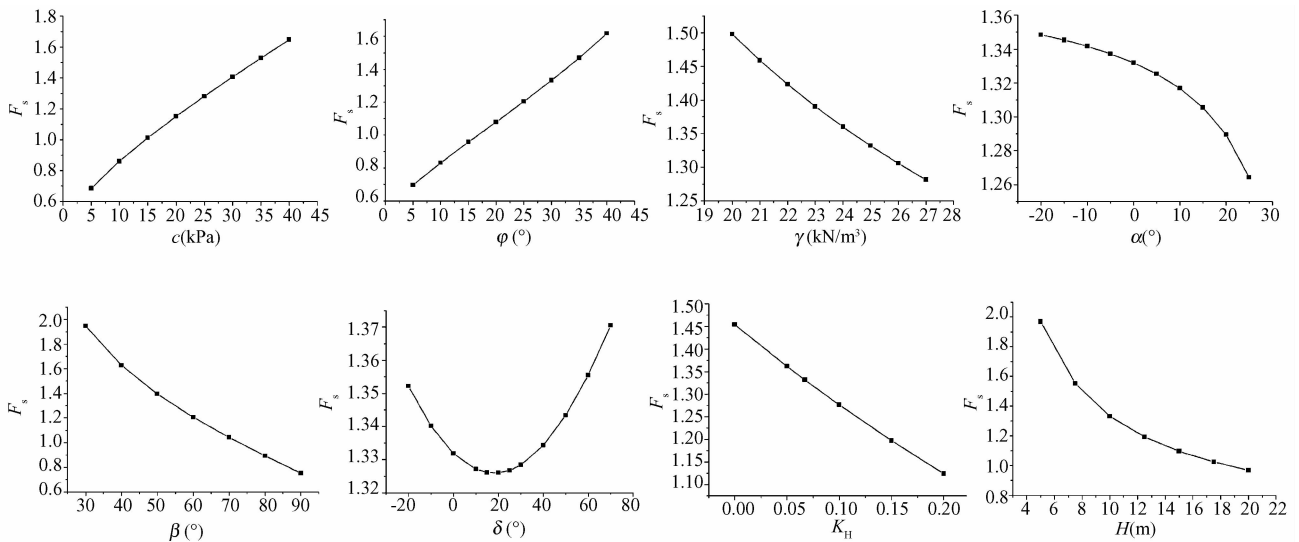


图 3 F_s 与 $c, \varphi, \gamma, \alpha, \beta, \delta, K_H, H$ 的关系

Fig. 3 Relation among F_s and $c, \varphi, \gamma, \alpha, \beta, \delta, K_H, H$

5 结论

(1) 本文采用对数螺旋线来描述均质边坡的滑动面,并用极限分析的上限理论,给出了边坡的上限临界高度公式。进行优化之后的式(22)可用于考虑任意方向地震作用、任意安全系数要求的边坡临界高度计算。通过对式(22)的变换,得到了求解实际坡高为 H 的边坡安全系数公式。

(2) 通过两个算例结果与 Slide 软件计算结果对比,采用这种方法计算安全系数较瑞典条分法大,与简化 Bishop 法计算所得结果非常接近,说明了该方法理论的正确性以及在实际工程中的可应用性。

(3) 本文针对简单均质边坡进行公式分析、推导,对于多层土体、水的作用等方面还有待进一步的研究。

参考文献:

- [1] Chen W F. 极限分析与土体塑性[M]. 詹世斌(译). 北京:人民交通出版社,1995. [Chen W F. Limit Analysis and Soil Plasticity [M]. Translated by ZHAN S B. Beijing: People's Communications Press, 1995. (in Chinese)]
- [2] 陈祖煜. 土力学经典问题的极限分析上、下限解[J]. 岩土工程学报,2002,24(1):1-11. [CHEN Z Y. Limit analysis for the classic problems of soil mechanics [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2002,24(1):1-11. (in Chinese)]
- [3] 林永亮,李新星. 地震作用下加筋土坡临界高度研究[J]. 岩土力学,2008,29(增刊):394-398. [LIN Y L, LI X X. Research on critical height of

reinforced slopes under seismic load [J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29 (Supp): 394 - 398. (in Chinese)]

- [4] 赵炼恒,罗强,李亮,等. 层状岩体边坡动态稳定性拟静力上限分析[J]. 岩土力学,2010,31(11):3627-3634. [ZHAO L H, LUO Q, LI L, et al. Upper bound quasistatic analysis of dynamic stability of layered rock slopes [J]. Rock and Soil Mechanics, 2010,31(11):3627-3634. (in Chinese)]
- [5] 尉学勇,王晓谋,怀超. 斜坡地基极限承载力上限解计算与分析[J]. 岩土工程学报,2010,32(3):381-387. [YU X Y, WANG X M, HUAI C. Calculation and analysis of upper limit solution of ultimate bearing capacity of sloping ground [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2010,32(3):381-387. (in Chinese)]
- [6] 王根龙,伍法权,张茂省. 平面滑动型岩质边坡稳定性极限分析上限法[J]. 工程地质学报,2011,19(2):176-180. [WANG G L, WU F Q, ZHANG M S. Method of upper bound limit analysis for plane sliding of rock slopes [J]. Journal of Engineering Geology,2011,19(2):176-180. (in Chinese)]
- [7] 张永兴,陈林,陈建功. 地震作用下边坡稳定性分析的坐标转换法[J]. 山地学报,2010,28(2):129-134. [ZHANG Y X, CHEN L, CHEN J G. A Coordinate Transformation Method for Evaluating Stability of Slope under Seismic Conditions [J]. Journal of Mountain Science,2010,28(2):129-134. (in Chinese)]

Research on critical height and stability of slopes based on upper bound limit analysis method

JIANG Yu-ping, CHEN Zheng-zhou, BI Gang, JIANG Xin

(School of Earth Sciences and Engineering, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

Abstract: A computational model for critical height of simple homogeneous slopes is presented based on the upper bound limit analysis theorem and the shear strength reduction technique with the rotational failure mechanism and the failure surface assumed to be a log-spiral surface. The seismic force and factor of safety are both introduced into the analysis of slopes in this method. The results are compared with those of the limit equilibrium method, indicating that the results are in agreement with those from the simplified Bishop method, a bit more unconservative than those from the Fellenius method.

Key words: limit analysis; log-spiral surface; critical height; factor of safety

责任编辑:张明霞