

灰色 GM(2,1) 模型在滑坡变形预测中的应用

王冬¹, 黄鑫^{2,3}, 王明东², 刘天霸^{2,3}

(1. 中铁西南科学研究院有限公司工程检测中心, 四川 成都 610031;

2. 中国航天科工集团航天科工惯性技术有限公司, 北京 100070; 3. 中国地质大学(北京), 北京 100083)

摘要: 应用灰色模型对滑坡变形进行预测, 目前常用灰色 GM(1,1) 模型, 而灰色 GM(2,1) 模型应用较少。在实际建模中发现, 取不同长度的数据序列, 建立的模型也不一样, 所得的预测结果也有所不同。针对上述问题, 本文基于统计的方法, 得出白店子滑坡灰色预测模型最佳数据序列长度, 在此基础上建立 GM(2,1) 模型对该滑坡深部位移进行预测, 并与 GM(1,1) 模型预测结果进行了对比。结果表明, 总体精度上 GM(2,1) 模型略高, 预测误差较小, 有很好的应用价值。

关键词: 滑坡; 灰色模型; GM(2,1) 模型

中图分类号: P642.22

文献标识码: A

文章编号: 1000-3665(2013)03-0121-05

滑坡预警预报是减轻滑坡灾害的最有效方法和途径之一, 也是国内外学者普遍关注的前沿课题^[1-3]。据不完全统计, 目前国内外学者已提出不少于 40 种的滑坡预报模型、方法及一系列的预报判据^[3]。但这些模型大多需要长期、连续的监测数据, 才能取得较好的预测结果。而对于短数据序列, 由于信息量少, 规律性不强, 大多模型无法正常使用, 在这种情况下灰色预测模型就具有较大的优势^[4]。

灰色理论模型具有利用“少数据”、“小样本”的优点^[5-6]。作为预测模型, 常用 GM(n , 1) 模型, 即只有一个变量的 GM 模型, 对数据序列要求是“综合效果”的时间序列。由于 n 越大, 计算越复杂, 但精度未必就高, 因此一般取 n 在 3 阶以下。GM(1,1) 模型只有一个指数分量, 故变化是单调的。GM(2,1) 为二阶模型, 有两个特征根, 其动态过程能反映单调的、非单调的或摆动(振荡的)等不同情况。

目前, 国内已有不少学者将灰色模型应用于滑坡变形预测^[7-11], 但大多数是采用灰色 GM(1,1) 模型, 而对于灰色 GM(2,1) 模型在滑坡预测中的应用研究较少。本文建立 GM(2,1) 模型对滑坡变形进行预测, 并将其预测结果与 GM(1,1) 模型预测结果进行对比, 以检验其对滑坡变形的预测精度。

1 灰色系统理论

1.1 灰色 GM(2,1) 模型原理

GM(2,1) 模型的微分方程为:

$$\frac{d^2 x^{(1)}}{dt^2} + a_1 \frac{dx^{(1)}}{dt} + a_2 x^{(1)} = u$$

其系数向量 $\hat{a} = [a_1, a_2, u]^T$, 用最小二乘法求解:

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ u \end{bmatrix} = [X(A, B)^T X(A, B)]^{-1} X(A, B)^T Y_N$$

$$\text{式中: } A = \begin{bmatrix} -a^{(1)}(x^{(1)}, 2) \\ -a^{(1)}(x^{(1)}, 3) \\ \vdots \\ -a^{(1)}(x^{(1)}, N) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(x^{(1)}(1) + x^{(1)}(2)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(2) + x^{(1)}(3)) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(N-1) + x^{(1)}(N)) & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_N = [a^{(2)}(x^{(1)}, 2), a^{(2)}(x^{(1)}, 3), \dots, a^{(2)}(x^{(1)}, N)]^T$$

其时间响应函数为:

$$x^{(1)}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{u}{a^2}$$

其中 λ_1, λ_2 为两个特征根, 按以下不同情况可分析系统的主要动态特征:

①若 $\lambda_1 = \lambda_2$, 则动态过程是单调的;

收稿日期: 2012-07-26; 修订日期: 2012-09-25

基金项目: 国家科技重大专项课题(2010ZX03006-007)

作者简介: 王冬(1978-), 男, 硕士, 主要从事工程地质及隧道监测方面的工作。

E-mail: 56370376@qq.com

②若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 且为实数, 则动态过程可能是非单调的;

③若 λ_1, λ_2 为共轭复根, 则动态过程是周期摆动的。

1.2 灰色 GM(2,1)模型建模步骤

(1) 对数据序列

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(N)\}$$

作一次累加生成, 得到:

$$X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(N)\}$$

其中 $x^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^t x^{(0)}(k)$, 然后作累加生成数据序列的一次累差

$$a^{(1)}(x^{(1)}, 1) = x^{(1)}(1) - x^{(1)}(0) = x^{(0)}(1)$$

$$a^{(1)}(x^{(1)}, 2) = x^{(1)}(2) - x^{(1)}(1) = x^{(0)}(2)$$

⋮

$$a^{(1)}(x^{(1)}, N) = x^{(1)}(N) - x^{(1)}(N-1) = x^{(0)}(N)$$

再作累加数据序列的二次累差

$$a^{(2)}(x^{(1)}, 2) = a^{(1)}(x^{(1)}, 2) - a^{(1)}(x^{(1)}, 1)$$

$$= x^{(0)}(2) - x^{(0)}(1)$$

$$a^{(2)}(x^{(1)}, 3) = x^{(0)}(3) - x^{(0)}(2)$$

⋮

$$a^{(2)}(x^{(1)}, N) = x^{(0)}(N) - x^{(0)}(N-1)$$

(2) 构造矩阵 $X(A, B)$:

$$\begin{bmatrix} -a^{(1)}(x^{(1)}, 2), & -\frac{1}{2}(x^{(1)}(1) + x^{(1)}(2)), & 1 \\ -a^{(1)}(x^{(1)}, 3), & -\frac{1}{2}(x^{(1)}(2) + x^{(1)}(3)), & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -a^{(1)}(x^{(1)}, N), & -\frac{1}{2}(x^{(1)}(N-1) + x^{(1)}(N)), & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{和 } Y_N = [a^{(2)}(x^{(1)}, 2), a^{(2)}(x^{(1)}, 3), \dots, a^{(2)}(x^{(1)}, N)]^T$$

(3) 求 $\frac{d^2 x^{(1)}}{dt^2} + a_1 \frac{dx^{(1)}}{dt} + a_2 x^{(1)} = u$ 的系数向量:

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ u \end{bmatrix} = [X(A, B)^T X(A, B)]^{-1} X(A, B)^T Y_N$$

(4) 解系数特征方程并得到系统响应方程:

$$\gamma^2 + a_1 \gamma + a_2 = 0,$$

$$\text{得 } \gamma_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

令 $W = a_1^2 - 4a_2$, 这时有两种情形:

①若 $W > 0$, 则微分方程的解为:

$$x^{(1)}(t+1) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c^*$$

其中 c_1, c_2 为系数。当 $t=0$ 时, 系数的计算根据 $x^{(1)}(1) = c_1 + c_2 + c^* = x^{(0)}(1)$ (c^* 为待定常数), 其导数;

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2 \approx x^{(1)}(2) - x^{(1)}(1) = x^{(0)}(2)$$

故由联立方程

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c^* = x^{(0)}(1) & (1) \\ c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2 = x^{(0)}(2) & (2) \end{cases}$$

求解, 得

$$c_1 = x^{(0)}(1) - c_2 - c^*$$

又由 $(x^{(0)}(1) - c_2 - c^*) \gamma_1 + c_2 \gamma_2 = x^{(0)}(2)$, 得

$$c_2 = \frac{x^{(0)}(2) - (x^{(1)}(1) - c^*) \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

应用待定系数法求得的 c^* 的特解为:

$$c^* = u/a_2$$

②若 $W < 0$, 有微分方程的解:

$$x^{(1)}(t+1) = e^{at} (A_1 \cos \beta t + A_2 \sin \beta t) + c^*$$

$$\text{其中 } a = \frac{-a_1}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}; A_1, A_2 \text{ 为系数,}$$

经推导可得:

$$A_1 = x^{(0)}(1) - c^*$$

$$A_2 = \frac{x^{(0)}(2) - aA_1}{\beta} = \frac{x^{(0)}(2) - a(x^{(0)}(1) - c^*)}{\beta}$$

(5) 将灰参数代入时间函数, 求生成数据序列计算值 $\hat{x}^{(1)}(t)$, 再对 $\hat{x}^{(1)}$ 求导还原得到 $\hat{x}^{(0)}(t)$ 。

1.3 精度检验

为了分析模型的可靠性, 必须对模型进行诊断。目前较通用的诊断方法是对模型进行后验差检验, 即先计算观察数据离差 s_1 :

$$s_1^2 = \sum_{i=1}^n (x^{(0)}(i) - \bar{x})^2$$

$$\text{其中, } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^{(0)}(i)$$

及残差的离差 s_2 :

$$s_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (q^{(0)}(i) - \bar{q})^2$$

$$\text{其中, } q^{(0)}(t) = x^{(0)}(t) - \hat{x}^{(0)}(t)$$

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q^{(0)}(i)$$

$$\text{再计算后验比: } c = \frac{s_1}{s_2}$$

及小误差概率:

$$p = \{ |q^{(0)}(t) - \bar{q}^{(0)}| < 0.6745s_1 \}$$

根据后验比 c 和小误差概率 p 对模型进行诊断 (表 1), 当 $p \geq 0.95$ 和 $c \leq 0.35$ 时, 模型可靠, 这时可根据模型对系统行为进行预测。

表 1 灰色理论模型精度等级
Table 1 Reference of precision validation grade

精度等级	c	p
一级 (好)	≤ 0.35	≥ 0.95
二级 (合格)	$0.35 < c \leq 0.45$	$0.80 \leq p < 0.95$
三级 (勉强)	$0.45 < c \leq 0.65$	$0.70 \leq p < 0.80$
四级 (不合格)	> 0.65	< 0.7

2 模型应用实例

2.1 滑坡概况

白店子滑坡位于几江办事处艾坪社区三组, 滑坡后缘居民住宅区断续分布多条拉张裂缝, 分布高程 180 ~ 280m, 前缘位于坡脚, 以长江为界; 北侧以广子桥为界, 南侧以白店子柑橘地为界, 为脊状地形, 羽状裂隙发育。滑坡区总体地形坡角 $23^{\circ} \sim 27^{\circ}$, 局部达到 35° , 整体上呈台阶状地貌; 滑坡后缘以上地形相对较陡, 岩性为 J_2s 泥岩、粉砂质泥岩互层。滑坡纵长 200 ~ 250m, 横宽约 570m, 滑体主要物质成分为第四系残坡积粉质粘土, 平均厚度 5m, 面积约 $1.4 \times 10^5 m^2$, 体积 $7 \times 10^5 m^3$, 为中型土质滑坡, 滑坡的主滑方向 231° 。

该滑坡监测点布置见图 1, 剖面图见图 2, SB1 点深部位移实测值见表 2。由资料可知该滑坡变形的时间序列具有明显的不断增加趋势, 且具有明显的非线性, 可采用 GM(2,1) 模型对位移值进行预测。

表 2 累计深部位移实测值 (2010 年)
Table 2 Accumulative deep displacement value

日期 (月 - 日)	实测值 (mm)	日期 (月 - 日)	实测值 (mm)	日期 (月 - 日)	实测值 (mm)
7 - 10	24.37	7 - 20	28.69	7 - 30	30.88
7 - 11	25.29	7 - 21	28.90	7 - 31	31.03
7 - 12	26.00	7 - 22	29.18	8 - 1	31.24
7 - 13	26.56	7 - 23	29.47	8 - 2	31.52
7 - 14	27.06	7 - 24	29.75	8 - 3	31.80
7 - 15	27.48	7 - 25	29.89	8 - 4	31.95
7 - 16	27.77	7 - 26	30.10	8 - 5	32.09
7 - 17	28.12	7 - 27	30.25	8 - 6	32.23
7 - 18	28.33	7 - 28	30.46		
7 - 19	28.55	7 - 29	30.67		

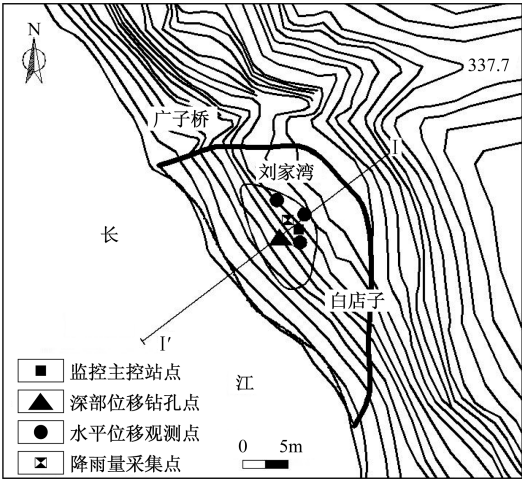


图 1 白店子滑坡专业监测平面布置图
Fig. 1 Monitoring system of the Baidianzi landslide

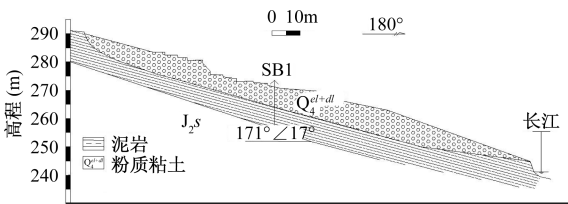


图 2 白店子滑坡剖面图
Fig. 2 Profile of the Baidianzi landslide

2.2 数据序列长度 n 的确定

在实际建模中, 在原始数据序列中取出一部分数据, 就可以建立一个模型。一般说来, 取不同的数据, 建立的模型也不一样, 即使都建立同类的 GM(2,1) 模型, 选择不同的数据, 参数的值也不一样。这种变化, 正是不同情况、不同条件对系统特征的影响在模型中的反映。

GM(2,1) 模型群中, 当数据量较少时, 建立全数据 GM(2,1) 模型才能充分利用有限的的数据反映系统的发展变化。当数据量较多时, 为避免某些奇异数据对预测的影响, 可建立多个部分数据 GM(2,1) 模型进行比较选择。

根据白店子滑坡 6.8m 处深部位移数据建立灰色 GM(2,1) 模型, 以说明灰色变形预测的过程。以 2010 年 8 月 7 日之前的观测数据建立模型, 对 2010 年 8 月 7 日 ~ 11 日的 6.8m 处累计位移变化进行预测。分别选取 $n = 16 \sim 30$ (n 为模型数据序列的长度) 进行模型试算, 得出 $n = 28$ 时模型预测结果均方差最小, 预测精度最高 (图 3)。当 $n = 28$ 时, $c = 0.1282, p = 1.0000$, 满足 $c \leq 0.35, p \geq 0.95$, 模型精度等级为一级。

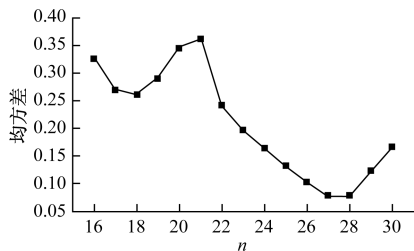


图 3 不同 n 值对应模型均方差图

Fig.3 Mean square error of different model

2.3 预测结果

取 $n=28$, 建立 $GM(2,1)$ 模型, 对 2010 年 8 月 7 日~11 日的滑坡 6.8m 处累计位移变化进行预测。预测结果见表 3、图 4, 由图可知, 模型预测精度较高, 满足实际工程需要。

表 3 实测值与预测值表

Table 3 Displacement values and the forecast results				
日期	实测值 (mm)	预测值 (mm)	绝对误差	相对误差 (%)
2010-08-07	32.58	32.6130	-0.0330	0.1013
2010-08-08	32.87	32.8556	0.0144	0.0438
2010-08-09	33.15	33.1000	0.0500	0.1508
2010-08-10	33.36	33.3462	0.0138	0.0413
2010-08-11	33.43	33.5943	-0.1643	0.4915

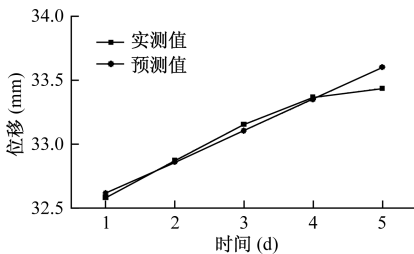


图 4 $n=28$ 时预测值与实测值对比图
(2010 年 8 月 7 日~11 日)

Fig.4 Curve of monitoring displacement and prediction displacement performed through $GM(2,1)$ analysis on August 7-11, 2010

3 $GM(1,1)$ 、 $GM(2,1)$ 结果比较

同样, 对该滑坡建立 $GM(1,1)$ 模型, 并将 $GM(1,1)$ 和 $GM(2,1)$ 模型预测结果进行比较, 结果见表 4、图 5。结果表明 $GM(1,1)$ 和 $GM(2,1)$ 模型都能对白店子滑坡短期位移趋势作出较好的预测, 由表 4 可知, 预测结果最大误差不超过 0.5%, 在允许范围之内, 满足精度要求, 而总体精度上 $GM(2,1)$ 模型预测结果略高。

表 4 不同模型的实测值与预测值

Table 4 Displacement values and the forecast results of different models

日期	实测值 (mm)	$GM(1,1)$ (mm)	相对误差 (%)	$GM(2,1)$ (mm)	相对误差 (%)
2010-08-07	32.58	32.6083	-0.0870	32.6130	0.1013
2010-08-08	32.87	32.8349	0.1068	32.8556	0.0438
2010-08-09	33.15	33.0631	0.2622	33.1000	0.1508
2010-08-10	33.36	33.2929	0.2012	33.3462	0.0413
2010-08-11	33.43	33.5243	-0.2820	33.5943	0.4915

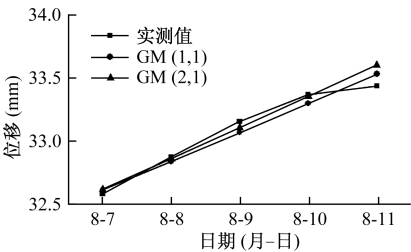


图 5 $GM(1,1)$ 、 $GM(2,1)$ 模型预测值比较

Fig.5 Prediction displacements of different models

4 结论

(1) $GM(2,1)$ 模型群中, 当数据量较少时, 建立全数据 $GM(2,1)$ 模型才能充分利用有限的的数据反映系统的发展变化。当数据量较多时, 为避免某些奇异数据对预测的影响, 可建立多个部分数据 $GM(2,1)$ 模型进行比较选择, 找出适宜于该滑坡建立灰色模型的最佳数据序列长度。

(2) 灰色 $GM(2,1)$ 模型具有利用“少数据”、“小样本”的优点, 对于滑坡短期变形预测具有较高的精度, 预测结果可用于指导现场施工, 实现滑坡治理的动态管理, 应用前景十分广泛。

(3) 灰色 $GM(1,1)$ 和 $GM(2,1)$ 模型都能对滑坡短期位移趋势作出较好的预测, 而总体精度上 $GM(2,1)$ 模型略高。

参考文献:

[1] EVANS S G, DEGRAFF J V. Catastrophic landslides: effects, occurrence, and mechanisms [M]. Boulder, Colorado: The Geological Society of America, 2002.

[2] 张倬元, 王士天, 王兰生. 工程地质分析原理 [M]. 2 版. 北京: 地质出版社, 1994. [ZHANG Z Y, WANG S T, WANG L S. Analytical theory of engineering geology [M]. 2nd ed. Beijing: The Geological Publishing House, 1994. (in Chinese)]

- [3] 许强, 汤明高, 徐开祥, 等. 滑坡时空演化规律及预警预报研[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(6): 1104 – 1112. [XU Q, TANG M G, XU K X, *et al.* Research on space-time evolution laws and early warning-prediction of landslides [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(6): 1104 – 1112. (in Chinese)]
- [4] 俞政. 灰色模型在忠武输气管道沿线滑坡预警预报中的应用[J]. 工程地球物理学报, 2011, 8(5): 622 – 626. [YU Z. Application of Grey Model's Prediction of Landslide Along Zhongwu Gas Transmission Pipeline [J]. Chinese Journal of engineering geophysics, 2011, 8(5): 622 – 626. (in Chinese)]
- [5] 邓聚龙. 灰预测与灰决策[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002. [DENG J L. Grey prediction and grey decision [M]. Wuhan: Huazhong University of Technology Press, 2002. (in Chinese)]
- [6] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002. [DENG J L. Grey theory [M]. Wuhan: Huazhong University of Technology Press, 2002. (in Chinese)]
- [7] 靳晓光, 李晓红. 边坡变形模拟预测的普适灰色模型[J]. 中国地质灾害与防治学报, 2001, 12(2): 51 – 55. [JIN X G, LI X H. General adequate grey model of modeling forecasting of slope deformation [J]. The Chinese Journal of Geological Hazard and Control, 2001, 12(2): 51 – 55. (in Chinese)]
- [8] 李秀珍, 孔纪名, 王成华. 中心逼近式灰色 GM(1, 1) 模型在滑坡变形预测中的应用[J]. 工程地质学报, 2007, 15(5): 673 – 676. [LI X Z, KONG J M, WANG C H. Application of center approach grey GM(1, 1) model to prediction of landslide deformation with a case study [J]. Journal of Engineering Geology, 2007, 15(5): 673 – 676. (in Chinese)]
- [9] 李晓红, 靳晓光, 亢会明, 等. GM(1, 1) 优化模型在滑坡预测预报中的应用模型[J]. 山地学报, 2001, 19(3): 265 – 269. [LI X H, JIN X G, KANG H M, *et al.* Application of GM(1, 1) Majorized Model to Simulation-forecast of Landslide [J]. Journal of mountain science, 2001, 19(3): 265 – 269. (in Chinese)]
- [10] 姜刚, 康艳霞, 杨志强, 等. 灰色理论模型在矿区滑坡变形预测中的应用[J]. 煤田地质与勘探, 2011, 39(3): 49 – 51. [JIANG G, KANG Y X, YANG Z Q, *et al.* Application of gray model to landslide deformation forecast in mining areas [J]. Coal Geology & Exploration, 2011, 39(3): 49 – 51. (in Chinese)]
- [11] 王朝阳, 许强, 范宣梅, 等. 灰色新陈代谢 GM(1, 1) 模型在滑坡变形预测中的应用[J]. 水文地质工程地质, 2009, 36(2): 108 – 111. [WANG Z Y, XU Q, FAN X M, *et al.* Application of renewal gray GM(1, 1) model to prediction of landslide deformation with two case studies [J]. Hydrogeology & engineering Geology, 2009, 36(2): 108 – 111. (in Chinese)]

Application of gray GM(2, 1) model to prediction of landslide deformation

WANG Dong¹, HUANG Xin^{2,3}, WANG Ming-dong², LIU Tian-ba^{2,3}

(1. Southwest Research Institute Co., LTD of C. R. E. C., Chengdu, Sichuan 610031, China;

2. China Aerospace Science & Industry COPR, ASIT CO., LTD, Beijing 100070, China;

3. China University of Geosciences(Beijing), Beijing 100083, China)

Abstract: An ordinary gray GM(1, 1) model is generally used for landslide deformation prediction, while the GM(2, 1) model is used less. It is found that taking different lengths of data series, the model and the predictions are also different in the actual modeling. In response to the above problems, this paper examines the best length of data series of the Baidianzi landslide and uses gray prediction model. The GM(2, 1) model of the landslide deep displacement is established for prediction and compared with the prediction of the GM(1, 1) model. The results show that the precision of GM(2, 1) model prediction is relatively high and the prediction error is comparatively low.

Key words: landslide; Gray model; GM(2, 1) model

责任编辑: 汪美华